M100 35

THE OPEN UNIVERSITY

Curso Básico de Matemáticas Unidad 35

Topología

950

The Open University

Curso Básico de Matemáticas Unidad 35

TOPOLOGIA

Preparado por el Equipo del Curso Básico de Matemáticas

Traductor:
Antonio Linares, Profesor de Matemáticas
Universidad del Valle

libros mcgraw-hill

méxico panamá madrid bogotá sao paulo nueva york
londres toronto sidney johannesburg
dusseldorf singapur

Queda terminantemente prohibido reproducir este libro, total
o parcialmente, sin autorización escrita del editor

RESERVADOS TODOS LOS DERECHOS (D. R.)

Copyright © 1974 respecto de la edición en idioma español, por
EDITORIAL McGRAW-HILL LATINOAMERICANA, S. A.
Colón, República de Panamá

0-07-090792-7

Traducido de TOPOLOGY
Copyright © 1971 by the Open University Press
Bletchley, Bucks, England

IMPRESO EN COLOMBIA PRINTED IN COLOMBIA

El concepto de enseñanza abierta desarrollado por la Open University utiliza materiales en forma de libros, películas y cintas magnetofónicas que el estudiante utiliza *fuera* de la institución. *Sin embargo, estos materiales también pueden utilizarse dentro de programas tradicionales.* Los componentes de los programas desarrollados por la Open University son:

LIBROS: Todos los libros tienen el mismo formato, y fueron escritos, diseñados y producidos por especialistas de la Open University. La mayor parte de los libros están profusamente ilustrados con diagramas y fotografías —muchas a colores— y tienen un diseño fácil y atractivo para el estudiante. Cada libro contiene objetivos de aprendizaje muy explícitos, y cuestionarios de autoevaluación, así como respuestas y comentarios a la autoevaluación, permitiendo así al estudiante, darse cuenta de su propio progreso. *Todos estos libros pueden utilizarse como textos —ya sea en forma individual, o uniendo varias unidades— o como material de referencia.*

PELICULAS: Las películas han sido preparadas como *material suplementario y de refuerzo* para permitir al profesor mayor libertad de trabajo con cada estudiante. Las películas están en 16 mm, y en su mayor parte son en blanco y negro. A la fecha de publicación de estos libros sólo están a la venta en idioma inglés.

CINTAS MAGNETOFONICAS: Al igual que las películas, estas cintas fueron preparadas como *material suplementario* y para ser utilizadas por el estudiante en su propia casa. A la fecha de publicación de estos libros sólo están a la venta en idioma inglés.

NOTA A LOS MAESTROS: Se han mantenido todas las referencias a otros elementos del programa en los materiales impresos, por considerarse que no obstaculizan la utilización de los libros como textos independientes. Los profesores que no tengan acceso a los materiales audio-visuales fácilmente podrán sustituirlos con sus propios experimentos o explicaciones.

Esta obra se imprimió en los Talleres Gráficos de Carvajal & Cía.
de Cali, Colombia, en el mes de abril de 1974. Se imprimieron 5000
ejemplares en papel offset de 90 g/m².

Contenido

		Página
	Objetivos	iv
	Diagrama estructural	v
	Glosario	vi
	Notación	viii
	Introducción	1
35.1	**Funciones continuas**	2
35.1.0	Introducción	2
35.1.1	Distancia	2
35.1.2	Continuidad	5
35.2	**Geometrías e invariables**	7
35.2.0	Introducción	7
35.2.1	Isometrías	8
35.2.2	Semejanzas	12
35.2.3	Otras geometrías	13
35.2.4	Topología	14
35.3	**Conjuntos abiertos y espacios topológicos**	17
35.3.0	Introducción	17
35.3.1	Vecindades	17
35.3.2	Frontera	20
35.3.3	Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados	21
35.3.4	Resumen	25
35.3.5	Continuidad	26
35.3.6	Espacios topológicos	32
35.4	**Conclusión**	34

OBSERVACIONES AL ALUMNO

Al comienzo de cada texto encontrará lo siguiente.

1. UNA PRESENTACION DE NUESTROS OBJETIVOS en la unidad, la cual puede usar para comprobar si ha completado el curso satisfactoriamente.
2. UN DIAGRAMA ESTRUCTURAL que le muestra cómo están relacionadas las diferentes secciones de la unidad. El diagrama consta de:
   a) *cuadros rojos* que muestran la secuencia principal.
   b) *cuadros negros punteados* (a la izquierda del rojo) que le muestran lo que esperamos ya sepa antes de fijarse un estudio detallado.
   c) *cuadros negros* (a la derecha del rojo) que le ayudan a escoger temas que puede posponer u omitir si tiene poco tiempo.
3. UN GLOSARIO de las definiciones, notaciones, etc., usadas en la unidad como referencia inmediata.
4. UNA BIBLIOGRAFIA de los libros que puede consultar cuando haya acabado el trabajo de la unidad.
5. CONCLUSIONES Y RESUMEN del trabajo realizado al final de cada texto.

NUMERACION E INDICADORES

Dentro de cualquier sección nos referimos a los temas por medio de un número. Al referirnos al mismo tema en otra sección, citamos cuatro números: número de la unidad, número del capítulo o parte, número de sección y número del tema. Por ejemplo, "Ecuación 3" si aparece en la misma sección, y "Ecuación 4.3.1.3", si está en otra sección. Los tres primeros números se citan en la parte superior de la página. Creemos que este es un sistema claro y fácil para consultar cualquier tema. Los indicadores serán una guía valiosa y le ahorrarán tiempo.

En la margen derecha del texto hemos tratado de indicar la clase del material. Los términos usados son tan claros que no necesitan explicación. Por ejemplo, "Discusión" significa que una vez que haya entendido el tema, no necesita de nuevo recurrir a esta parte del texto. Estos INDICADORES tienen por objeto ayudarlo a localizar rápidamente las partes importantes cuando esté repasando o tenga que omitir parte del texto por falta de tiempo.

También hemos tratado de indicar la importancia de los temas por el sistema de estrellas.

*** Esto es muy importante. Usted debe entenderlo claramente. En algunos casos lo usará con tanta frecuencia, que se familiarizará con ello sin necesidad de memorizarlo deliberadamente. El punto principal de este curso es no aprenderse los datos de memoria; nosotros creemos que es más importante que entienda el trabajo y sea capaz de aplicarlo en la solución de los problemas.

** Este es de menor importancia, pero tiene material al cual nos referiremos más adelante.

* Esto generalmente no lo guía a trabajos adicionales en este curso y lo puede omitir si tiene poco tiempo.

■ Indica el final de cada ejemplo, ejercicio o solución.

Objetivos

El principal objetivo de esta unidad es generalizar la definición de función continua que dimos en la *Unidad 7, Sucesiones y límites I,* y reformularla en términos de una más amplia aplicación. Al hacer esto introduciremos la topología.

Después de trabajar esta unidad debe estar en capacidad de:

(i) explicar el significado de los términos: isometría, semejanza, trasformación topológica, vecindad, punto frontera, frontera, conjunto abierto, conjunto cerrado, interior, clausura, espacio topológico, topología;

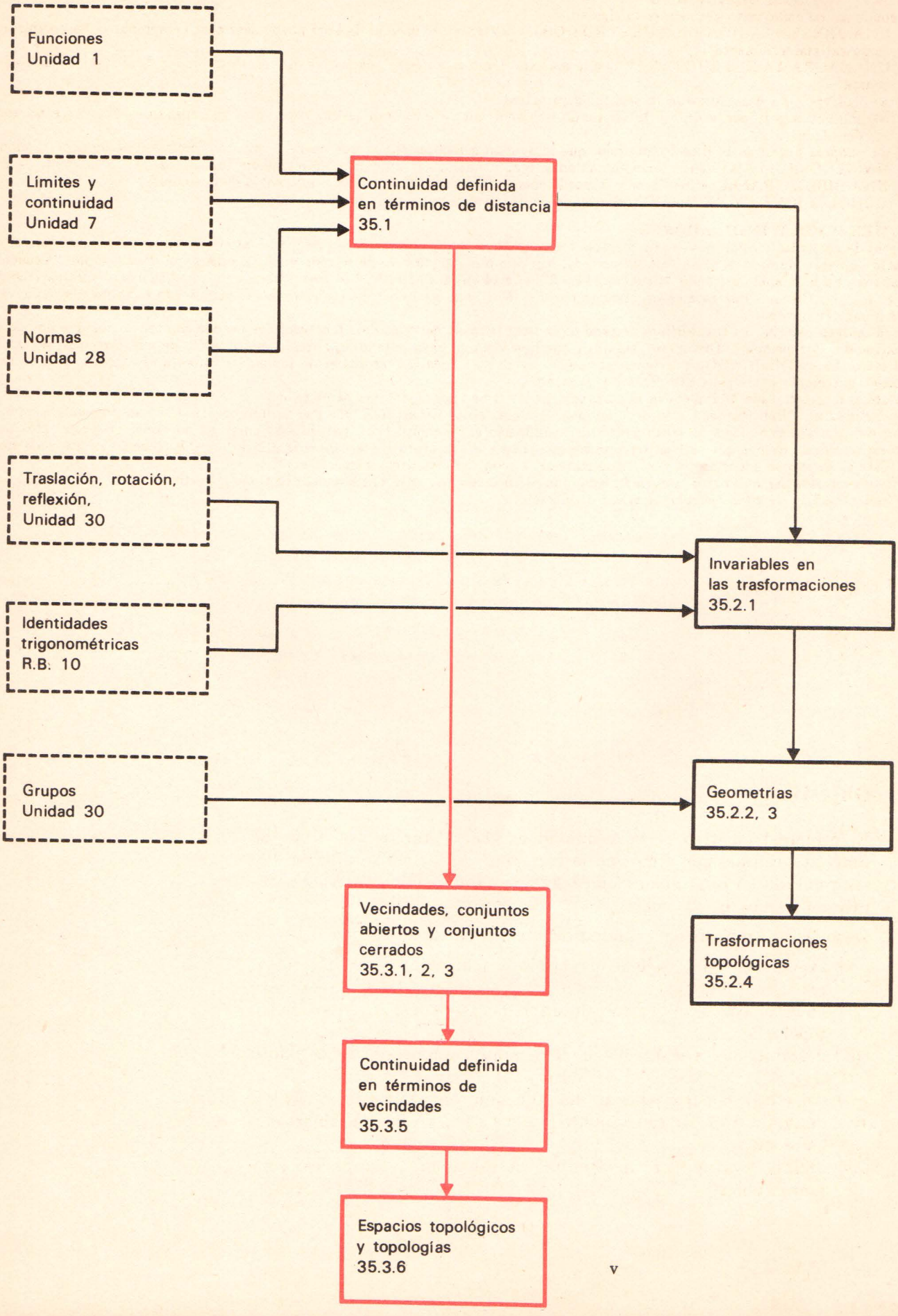
(ii) describir las vecindades de los puntos dados de un conjunto $S \subseteq R^n$;

(iii) encontrar las fronteras de los subconjuntos dados de $S \subseteq R^n$;

(iv) determinar si los subconjuntos dados de $S \subseteq R^n$ son abiertos o cerrados;

(v) definir *continuidad* en términos de distancia, vecindades, conjuntos abiertos.

Diagrama estructural



Glosario

Página

BICONTINUA	Una *trasformación bicontinua* es una *trasformación continua* que tiene una inversa continua.	14
CLAUSURA	La *clausura* de un subconjunto X de $S(\subseteq R)$ es el conjunto que se obtiene cuando se añaden a X todos sus *puntos fronteras* en S.	23
CONJUNTO ABIERTO	X es un subconjunto *abierto* de $S(\subseteq R^n)$ si X es un subconjunto de S que no contiene *ningún* punto *frontera* en S.	21
CONJUNTO CERRADO	X es un subconjunto *cerrado* de $S(\subseteq R^n)$ si X es un subconjunto de S que contiene *todos* sus puntos *fronteras* en S.	21
CONTRACCION	Una *contracción* es una trasformación por la cual todas las distancias se reducen en la misma proporción.	12
DEFORMACION	Una *deformación* es una *trasformación,* por la cual todas las distancias paralelas a algunas líneas fijas se cambian en la misma proporción.	14
DEFORMACION ELASTICA	Una *deformación elástica* es una trasformación *bicontinua* cualquiera.	1, 15
DESVIACION	Una *desviación* es una trasformación en la cual una familia de líneas paralelas se deslizan en forma relativa entre sí, mientras se conserva la "rectilineidad" de las líneas que las cortan.	13
DILATACION	Una *dilatación* es una trasformación por la cual todas las distancias se aumentan en la misma proporción.	12
DISTANCIA	La *distancia* entre dos puntos x, y de R^n es $$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$ donde $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.	3
ESPACIO TOPOLOGICO	Un *espacio topológico* consiste en un conjunto S y una colección de sus subconjuntos que contiene, además, todas las uniones y todas las intersecciones de un número finito de los subconjuntos, así como también el conjunto vacío y el conjunto S.	32
FRONTERA	Si X es un subconjunto de $S(\subseteq R^n)$, entonces la *frontera* de X en S es el subconjunto de R^n formado por todos los *puntos fronteras* de X.	20
GEOMETRIA AFIN	La *geometría afín* es el estudio de los *invariables* en las trasformaciones de la forma $$(x_1, x_2) \longmapsto (ax_1 + bx_2 + l, cx_1 + dx_2 + m),$$ donde $ad \neq bc$. Tales trasformaciones incluyen la *desviación* y la *deformación,* y todas las *trasformaciones de semejanza.*	13

INTERIOR	El *interior* de un subconjunto X de $S(\subseteq R^n)$ en S es el conjunto de elementos de X que no son *puntos fronteras* de X.	23
ISOMETRIA	Una *isometría (trasformación rígida)* es una trasformación uno a uno que preserva la *distancia*; por ejemplo, las *reflexiones, rotaciones* y *traslaciones.*	11
METRICA	Una *métrica* es una función de la forma $$d: R^n \times R^n \longmapsto R$$ que define la *distancia* en R^n dotada de las propiedades siguientes: (i) $d(x, x) = 0$ (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (iii) $d(x, y) = d(y, x)$ (iv) $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$ $(x, y, z \in R^n)$.	19
PROPIEDAD INVARIABLE	Una *propiedad invariable* de una clase particular de trasformaciones es una propiedad que se preserva en las trasformaciones.	7
PUNTO FRONTERA	Si X es un subconjunto $S(\subseteq R^n)$, entonces un punto $p \in S$ es un *punto frontera* de X en S si toda *vecindad* de p en S contiene al menos un punto de X y al menos un punto (de S) que no está en X.	21
RAZON CRUZADA	Una *razón cruzada* es la razón de dos razones en las cuales dos puntos, digamos C y D, dividen un segmento de recta AB: $$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}.$$ Las longitudes están *dirigidas* (tienen *signo*) de modo que, si *solamente uno* de los puntos C o D se encuentra entre A y B, entonces la razón cruzada es negativa.	14
REFLEXION	Una *reflexión* es una *isometría* tal que todos los segmentos de recta que unen los puntos con sus respectivas imágenes tienen una mediatriz común.	10
RELACION DE CONGRUENCIA	La *relación de congruencia* es la relación de equivalencia de la geometría elemental: La figura A es congruente con la figura B si B se puede obtener de A a través de una *isometría.*	11
RELACION DE SEMEJANZA	La relación de *semejanza* es la relación de equivalencia: La figura A es semejante a la figura B si B se puede obtener de A por medio de una trasformación donde las rectas y los ángulos entre ellas sean *invariables.*	12
ROTACION	Una *rotación* es una *isometría* que deja *invariable* un solo punto del plano.	9
TOPOLOGIA	(i) *Topología* es el estudio de los *invariables* en las *trasformaciones topológicas.*	1, 15

		Página
	(ii) Una *topología* es una colección de subconjuntos que usamos para definir un *espacio topológico.*	
TORO	Un *toro* es la superficie que se obtiene cuando se toma un cilindro, se dobla para formar un aro y se unen, entonces, sus dos extremos.	15
TRASFORMACION CONTINUA	Una *trasformación continua* es una trasformación tal que la imagen inversa de todo *conjunto abierto* del conjunto imagen es un conjunto abierto del dominio.	27
TRASFORMACION DE SEMEJANZA	Una *trasformación de semejanza* es una trasformación uno a uno que multiplica las *distancias* por un factor fijo $m > 0$.	12
TRASFORMACION TOPOLOGICA	Una *trasformación topológica* es una *trasformación bicontinua* uno a uno.	15
TRASLACION	Una *traslación* es una *isometría* donde todos los puntos se mueven una distancia constante paralelamente a una recta dada.	8
VECINDAD O ENTORNO	Para $x \in S(\subseteq R^n)$ y $r > 0$, una *vecindad* de x en S es el conjunto de todos los puntos y de S tales que $d(x, y) < r$	17

Notación

Los símbolos se presentan en el mismo orden en que aparecen en el texto.

$d(x, y)$	La distancia entre x y y, $(x, y \in R^n)$.	3
$\subseteq$	"es un subconjunto de".	5
S	Un subconjunto de R^n.	19
$N(x, r, S)$	La vecindad de x que tiene radio r en S.	19
$\varnothing$	El conjunto vacío.	23
R_0^-	El conjunto de los números reales no positivos.	30
$\mathscr{C}$	Una colección no vacía de subconjuntos (los conjuntos abiertos) de un espacio topológico.	32

Bibliografía

B. H. Arnold, *Intuitive Concepts in Elementary Topology* (Prentice-Hall, 1962).

Este libro sigue un enfoque intuitivo similar al nuestro. El Capítulo 1 estudia la pregunta: "¿Qué es topología?", el Capítulo 3 se refiere a la equivalencia topológica en un espacio tridimensional; el Capítulo 7 estudia la distancia y las trasformaciones y el Capítulo 8, lo referente a espacios topológicos.

El libro contiene bastante material que no se estudia en este texto, y sería una lectura interesante y estimulante para los estudiantes que desean adelantar en el tema.

35.0 INTRODUCCION

35.0

Introducción

* *

La topología es una parte fundamental de la matemática de hoy. Como disciplina que deba ser estudiada por derecho propio, apenas lo ha conseguido recientemente, pero su desarrollo ha sido muy rápido en las últimas décadas. Ha existido una demanda creciente de definiciones precisas acerca del significado de algunos términos como "cercanía", "continuidad" y de varias propiedades de los espacios matemáticos.

La palabra *topología* significa, etimológicamente, *estudio de la posición o del lugar.* Viene de dos palabras griegas, τοπος que significa *lugar* y λογια que significa *estudio.* En cierta época se le dio el nombre latino *analysis situs.* Quizá hoy podríamos describirla más exactamente como el estudio de las trasformaciones que conservan invariables ciertas propiedades.

Parte de la topología se dedica al estudio de los objetos geométricos y el comportamiento que éstos tienen en lo que hemos llamado *deformaciones elásticas*: estirar, torcer pero no romper. Sin embargo, gran parte de la topología es un estudio muy general y abstracto de la naturaleza de los espacios y está muy lejos de toda intuición geométrica. Las raíces de los aspectos específicamente geométricos de la topología aparecen en el siglo XVII. Por ejemplo, Euler se refiere a Leibniz como el creador del *analysis situs,* pero el primer verdadero gran intento de un desarrollo sistemático de estos aspectos geométricos se debe a Poincaré en 1895.

El estudio de las superficies sometidas a ciertas deformaciones elásticas se ha popularizado en muchos libros elementales y en algunas películas porque determinados aspectos de ese estudio se prestan para obtener unos resultados interesantes que, algunas veces, son verdaderamente espectaculares. Sin embargo, no caiga en el error de creer que la mayor parte de la topología se dedica a analizar si es posible que se quite la camisa sin haberse quitado previamente la chaqueta. Este tipo de problema es de interés pasajero. Aquí introduciremos algunos de los aspectos formales de la topología que nos permitirán ser más precisos en cuanto a algunas palabras que se suelen usar comúnmente, en particular la palabra *continuidad.*

El Curso Básico de Matemáticas pretende ser una introducción general de lo que es la matemática y de lo que hace la matemática, y estaría incompleto si no hiciera referencia a esta importante rama de la matemática, la topología. Aunque esta unidad se encuentra casi en el final del curso, debe, sin embargo, estudiarla con todo cuidado porque no solamente brinda parte de las bases sobre las que se construirán los cursos futuros, sino que también ayuda a profundizar en la comprensión de algunos puntos que se trataron en unidades anteriores.

Un tema central en esta unidad es el concepto de *trasformación continua.* Se hace un llamado a la intuición pero damos definiciones formales y precisas de un buen número de conceptos fundamentales.

En nuestra discusión daremos muchas definiciones y resultados que son aplicables a todos los conjuntos en general. Sin embargo, como nuestro llamado a la intuición será comúnmente de tipo geométrico, hablaremos casi siempre en términos de subconjuntos de R, R^2, R^3, y, en general, de R^n, y de ahí hablaremos de *puntos* $x, y, \ldots \in R^n$, en vez de hablar de *elementos* de algún conjunto general.

Leonhard Euler

Gottfried Wilhelm Leibniz

Henri Poincaré

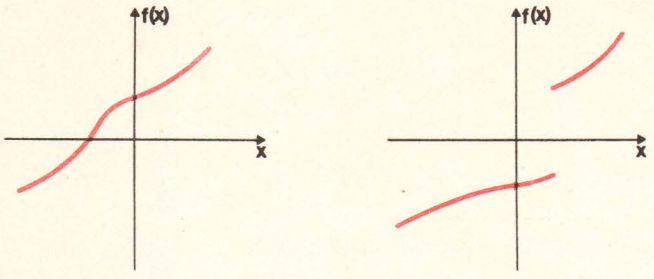
35.1 FUNCIONES CONTINUAS

35.1

35.1.0 Introducción

35.1.0
Introducción
* *

Todos tenemos una idea intuitiva de lo que significa la palabra *continua*. Por ejemplo solemos decir que ha estado lloviendo *continuamente* todo el día, cuando queremos dar a entender que ha llovido sin parar. Del mismo modo, tampoco tenemos dificultad en decir que una de las curvas que se muestran es continua, mientras que la otra no.



Curva continua Curva discontinua

En la *Unidad 7, Sucesiones y límites I,* dimos una definición de *continuidad*; aquí generalizaremos esa definición y la reformularemos para que tenga más amplia aplicación.

Para hacer más precisas nuestras ideas acerca de la continuidad, usamos con frecuencia el concepto de "estar cerca de" (esto es, de "cercanía"). Así, si queremos determinar si una función es continua, o no, en un punto dado P de su dominio, realizamos una investigación formal de lo que sucede *cerca* del punto P. Ahora bien, la palabra *cerca* representa solamente un concepto intuitivo; podemos comprobar, mediante algunas preguntas sencillas, que, en efecto, es así:

¿Está Méjico *cerca* de Panamá?
¿Está el número 1,2067 *cerca* del número 1,2063?
¿Está $x + \epsilon$ *cerca* de x?

Es evidente que el comandante de un avión supersónico y un ciclista darán respuestas diferentes a la primera pregunta. La respuesta a la segunda pregunta depende del tipo de exactitud requerida en la situación particular que originó la pregunta. La respuesta a la tercera pregunta dependerá, en general, del contexto matemático y de la magnitud de ϵ.

35.1.1 Distancia

35.1.1
Discusión
* *

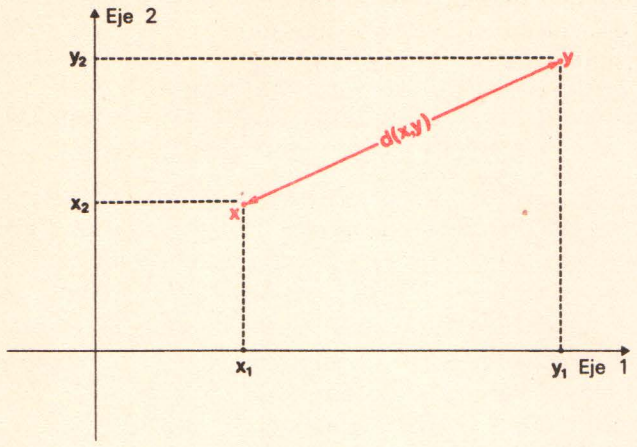
Si queremos ser precisos en la formulación y respuesta de preguntas como las anteriores, necesitamos tener una norma fija sobre el significado de "cercanía". Un modo de conseguirlo consiste en definir el concepto de *distancia*. Si x y y son dos puntos de R, entonces ya sabemos que la definición matemática de la distancia entre x y y (tomados como puntos de la recta) viene dada por

$$d(x, y) = |x - y|.$$

En el plano, si x y y son dos puntos de R^2, entonces

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

donde (x_1, x_2) y (y_1, y_2) son, respectivamente, las coordenadas de x y y. (Tomamos la raíz cuadrada positiva.)



Podemos generalizar la expresión de la distancia en una dimensión n cualquiera. Así si x y y son puntos de R^n, tenemos que

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2},$$

Definición 1
* *

donde $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ son las coordenadas de x y y, respectivamente. (Esta expresión no es más que una generalización basada en el teorema de Pitágoras.) 3

Observe que la *distancia* define una aplicación de $R^n \times R^n \longrightarrow R$, puesto que, para dos puntos cualesquiera $x, y \in R^n$, tenemos que

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \longmapsto d(x, y),$$

y $d(x, y) \in R$.

Ejercicio 1

Ejercicio 1
(2 minutos)

Encontrar la distancia $d(x, y)$ en los casos siguientes:

(i) $x, y \in R^2$, donde

x es $(-1, 1)$ y y es $(2, -5)$

(ii) $x, y \in R^4$, donde

x es $(2, -1, 0, 3)$ y y es $(-1, 0, 1, -2)$ ■

Como sucede con mucha frecuencia en el estudio de la matemática, lo que realmente nos interesa no es tanto la fórmula que se utiliza para calcular alguna cantidad, sino las propiedades generales que posee la cantidad estudiada. La distancia $d(x, y)$ es un número real que verifica las condiciones siguientes:

Discusión
* *

(continúa en la página 4)

Solución 1

Solución 1

(i) $d(x, y) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (1 - (-5))^2}$

$= \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$

(ii) $d(x, y) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-1 - 0)^2 + (0 - 1)^2 + (3 - (-2))^2}$

$= \sqrt{9 + 1 + 1 + 25}$

$= 6.$ ■

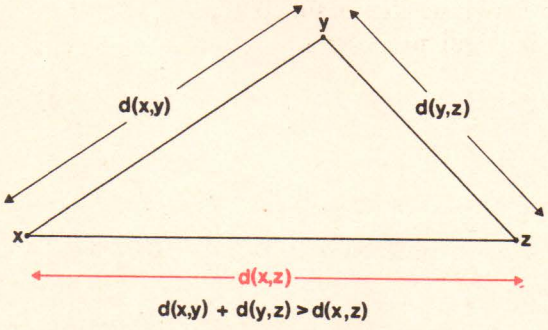
(viene de la página 3)

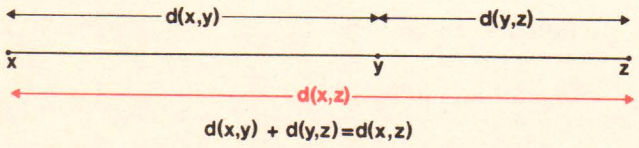
(i) $d(x, y) \geqslant 0$
(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(iii) $d(x, y) = d(y, x)$ $\qquad (x, y, z \in R^n)$
(iv) $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$

La primera condición establece que la distancia $d(x, y)$ es siempre un número real no negativo. La segunda establece que la distancia de un punto a sí mismo es 0. La tercera establece que la distancia es simétrica. La cuarta es la bien conocida *desigualdad triangular*, llamada así porque, cuando x, y y z se toman como los tres vértices de un triángulo plano, la condición se deriva del teorema que establece que la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado. El caso especial

$$d(x, y) + d(y, z) = d(x, z)$$

ocurre únicamente cuando x, y, z son puntos de una misma recta.





(Ya hemos encontrado anteriormente la *desigualdad triangular:*
al discutir los vectores geométricos (*Unidad 22,* Sección 22.1.3);
al discutir los números complejos (*Unidad 27,* Sección 27.4.3);
al discutir las normas de los vectores (*Unidad 28,* Sección 28.2.2).)

35.1.2 Continuidad

35.1.2

Tema principal

* *

En la *Unidad 7, Sucesiones y límites I,* dimos la siguiente definición de una función continua $f:R \to R$:

> Si f es una función real y a es un elemento de su dominio, entonces f es continua en a si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y es igual a $f(a)$.

Examinando la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ que dimos en la *Unidad 7**, encontramos que este límite es igual a $f(a)$ si, dado cualquier número positivo ϵ, todo lo pequeño que se quiera, existe un número positivo δ tal que la imagen, producida por f, del conjunto no vacío $\{x : x \in R,\ 0 < |x - a| < \delta\}$, es un subconjunto de $]f(a) - \epsilon,\ f(a) + \epsilon[$.

Ya podemos generalizar la noción de función continua. Todo lo que tenemos que hacer es sustituir cualquier referencia implícita o explícita del módulo, que es apropiado mientras estamos trabajando únicamente en R, por la conveniente función distancia d, que es su generalización cuando trabajamos en R^n. Así $|x - a| < \delta$ se convierte en

> "la distancia entre a y x es menor que δ",

es decir,

$$d(a, x) < \delta,$$

y $f(x) \in]f(a) - \epsilon,\ f(a) + \epsilon[$ se verifica si

> "la distancia entre $f(a)$ y $f(x)$ es menor que ϵ",

es decir,

$$d(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Así, pues, podemos definir ahora una función continua de un subconjunto de R^m en un subconjunto de R^n, de la siguiente manera:

Sea

$$f : X \longrightarrow Y,$$

donde $X \subseteq R^m$ y $Y \subseteq R^n$.

Para cualquier punto $a \in X$, decimos que f es continua en a si, dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, si $x \in X$ y

Definición 1

* * *

$$d_m(a, x) < \delta,$$

entonces

$$d_n(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

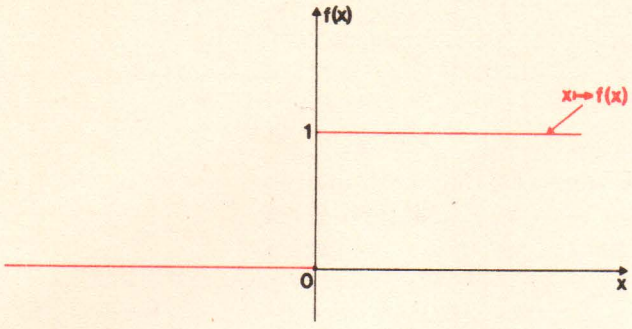
(Usamos d_m y d_n para diferenciar las distancias en R^m de las distancias en R^n.)

*Se modifica ligeramente la definición dada en la *Unidad 7*. Hemos remplazado $|x - a| \leqq \delta$ por $|x - a| < \delta$, y sustituido $[f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon]$ por $|f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon|$ Se fortaleció un poco la definición porque se han excluido los puntos extremos de los intervalos, tanto en el dominio como en el conjunto imagen.

Ejemplo 1

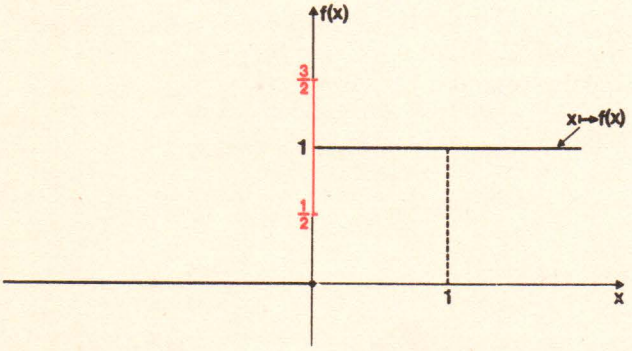
Considere la función $f:R \to R$ definida por

$$f:x \longmapsto 0 \qquad (x \leqslant 0)$$
$$f:x \longmapsto 1 \qquad (x > 0)$$



Intuitivamente vemos que f es continua en todos los puntos excepto en 0.

Examinemos el punto 1. Entonces, la imagen, $f(1)$, también es 1. Ahora escojamos algún valor arbitrario para ϵ, digamos $\epsilon = \frac{1}{2}$. Por consiguiente, en el codominio consideramos el intervalo $]1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}[$, es decir, $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.

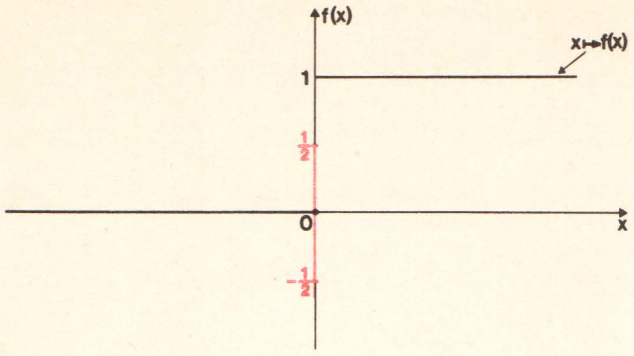


Queremos encontrar un $\delta > 0$ tal que, cuando la distancia entre x y 1 sea menor que δ, entonces la distancia entre $f(x)$ y $f(1)$ sea menor que ϵ. Esto es, tenemos que encontrar algún número $\delta > 0$ que produzca un intervalo $]1 - \delta, 1 + \delta[$ cuya imagen esté en $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. Es evidente que cualquier $\delta < 1$ verificará la condición requerida, ya que todos los puntos del dominio cuya distancia a 1 es menor que una unidad están aplicados al número 1 del codominio y, por consiguiente, sus imágenes están en $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. De hecho, $\delta < 1$ es apropiado para *cualquier* otra escogencia de ϵ. Podemos aplicar un argumento semejante si escogemos cualquier otro punto del dominio, *excepto* 0.

Consideremos ahora el punto 0. Puesto que tenemos que

$$f:x \longmapsto 0 \qquad (x \leqslant 0),$$

la imagen de 0, $f(0)$, es 0. Escojamos $\epsilon = \frac{1}{2}$ una vez más. Ahora, sin embargo, consideraremos el intervalo $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ del codominio.



Ahora bien, no importa cuál sea el $\delta > 0$ que escojamos, estamos seguros de tener algún punto dentro de una distancia δ de 0 en el dominio y cuya imagen es 1 porque

$$f: x \longmapsto 1 \qquad (x > 0).$$

Así, algún punto dentro de una distancia δ de 0 tendrá, necesariamente, la imagen 1, no importa cuán pequeño escojamos δ, y 1 está *fuera del* intervalo $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Por tanto, la función *no* es continua en 0, y esto confirma la idea intuitiva que teníamos al examinar la gráfica de la función. ■

Se dice que una función es continua si es continua *en todos* los puntos de su dominio. (Observe la diferencia entre *continua en un punto* y *continua*: este último término significa que la función es continua en todos los puntos del dominio.)

Definición 2
* * *

Más tarde volveremos a estudiar la continuidad. La definición que tenemos ahora es suficiente para nuestro propósito inmediato, que es descubrir qué es la topología.

35.2 GEOMETRIAS E INVARIABLES

35.2

35.2.0 Introducción

35.2.0

Introducción
* *

Podemos mirar la topología como una clase fundamental de geometría. Seguiremos el enfoque de Klein y consideraremos cada tipo de geometría como caracterizado por una clase particular de trasformaciones.

Antes de introducir y discutir la clase especial de trasformación que nos ha de interesar específicamente en el estudio de la topología, consideraremos unas cuantas trasformaciones $R^2 \longrightarrow R^2$ y, en particular, las propiedades *que se preservan* (*se conservan intactas*) *en estas trasformaciones.*

En la *Unidad 30, Grupos I,* consideramos conjuntos de aplicaciones (operaciones simétricas) que dejan invariables las figuras dadas. Allí encontramos que el conjunto de todas las operaciones simétricas que dejan invariable una figura dada forma un grupo con la composición de funciones. En esta sección consideramos algunas geometrías; cualquier geometría particular es el estudio de las propiedades de los objetos geométricos que permanecen invariables cuando los objetos geométricos se someten a un conjunto de trasformaciones permitidas.

En cada caso, el conjunto de las trasformaciones uno a uno que dejan invariable una propiedad dada forman necesariamente un grupo con la composición. En cada geometría, decimos que dos figuras son *equivalentes* si una figura puede obtenerse de otra mediante el tipo de trasformación que estemos considerando.

Veremos cómo se construye uno de esos modelos. Cada geometría incluye las que la preceden. Cuando aumenta la variedad de trasformaciones permitidas, decrece el número de propiedades invariables; con lo cual, más y más objetos resultan equivalentes.

35.2.1 Isometrías

35.2.1

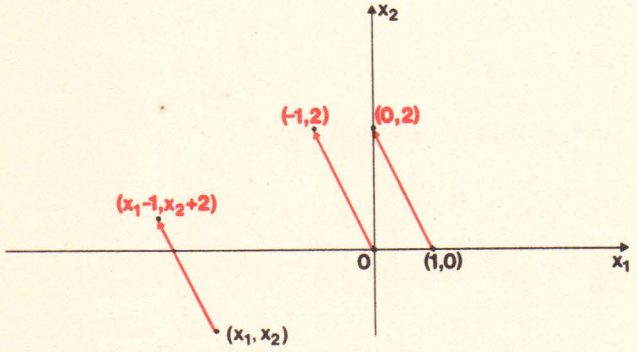
Discusión

* *

Consideraremos la trasformación $f:R^2 \longrightarrow R^2$ dada por

$$f:(x_1, x_2) \longmapsto (x_1 - a, x_2 - b).$$

(Observe que estamos usando x_1 y x_2 como las coordenadas, en R^2, de algún punto general x.) Supongamos que $a = 1$ y $b = -2$. Entonces, cada punto de R^2, (x_1, x_2), es *trasladado* a un nuevo punto de R^2, $(x_1 - 1, x_2 + 2)$.



Veamos qué le ha sucedido a la distancia entre dos puntos cualesquiera, en esta trasformación. (Intuitivamente, sabemos que la distancia no cambia en una traslación, pero ahora queremos saberlo con precisión; haremos una comprobación algebraica.)

Supongamos que tenemos dos puntos, $(0, 5)$ y $(-2, 1)$. La distancia entre ellos es

$$\sqrt{(0 + 2)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{20}.$$

Si ahora *trasladamos* estos puntos, con $a = 1$, $b = -2$, obtenemos los nuevos puntos $(-1, 7)$ y $(-3, 3)$ respectivamente. La distancia entre ellos es

$$\sqrt{(-1 + 3)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{20},$$

que es el mismo valor de antes. Es fácil demostrar que la distancia entre dos puntos cualesquiera es invariable cuando los puntos sufren la trasformación general

$$f:(x_1, x_2) \longmapsto (x_1 - a, x_2 - b).$$

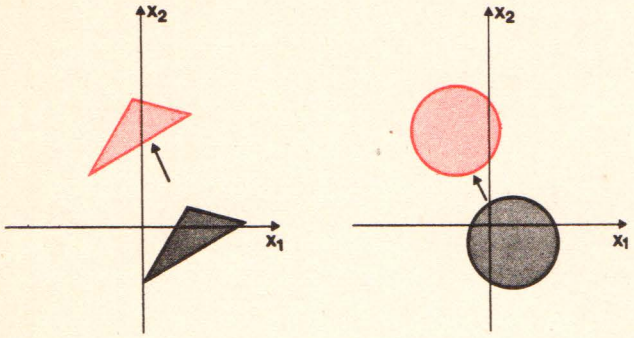
Para ello, consideremos dos puntos, x y y, de R^2, cuyas coordenadas son, respectivamente, (x_1, x_2) y (y_1, y_2). Tenemos que

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

y

$$d(f(x), f(y)) = \sqrt{((x_1 - a) - (y_1 - a))^2 + ((x_2 - b) - (y_2 - b))^2}$$
$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$= d(x, y).$$

Esto significa que, si un subconjunto cualquiera de R^2, como un triángulo, un círculo, etc., *se trasladan,* entonces se preservan la forma y el tamaño exactos, lo único que cambia es la posición.



A continuación consideraremos la trasformación $R^2 \longrightarrow R^2$ dada por

$$f:(x_1, x_2) \longmapsto (x_1 \cos\psi - x_2 \operatorname{sen}\psi, x_1 \operatorname{sen}\psi + x_2 \cos\psi).$$

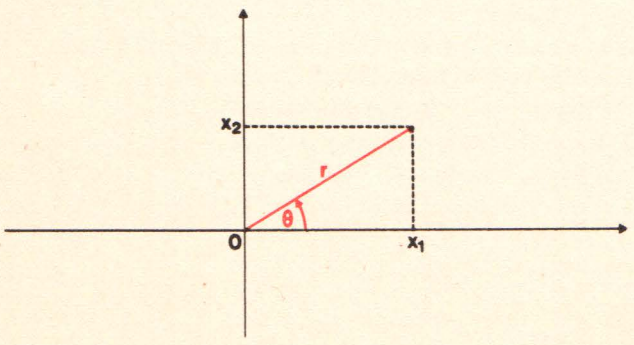
Podemos expresar esa trasformación en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que esta trasformación es una *rotación* alrededor del origen, que comprende un ángulo ψ en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. (Véase la *Unidad 23,* Sección 23.2.4.)

¿Se preserva la distancia en esta trasformación? Podemos responder más fácilmente esta pregunta si expresamos la distancia entre dos puntos de R^2 en términos de sus coordenadas polares. Podemos hacer el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares usando las fórmulas

$$x_1 = r\cos\theta,$$
$$x_2 = r\operatorname{sen}\theta.$$



Si $x = (r_x, \theta_x)$ y $y = (r_y, \theta_y)$ son las coordenadas polares de dos puntos, x y y, entonces sus coordenadas cartesianas son

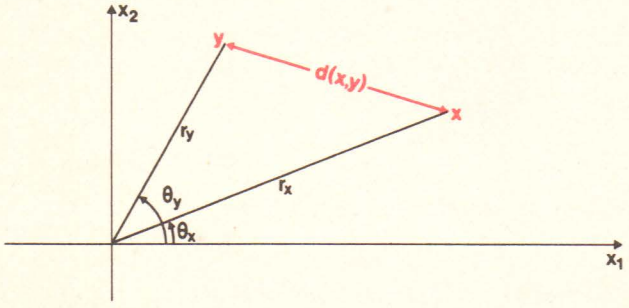
$$x = (r_x \cos\theta_x, r_x \operatorname{sen}\theta_x)$$

$$y = (r_y \cos\theta_y, r_y \operatorname{sen}\theta_y).$$

De donde tenemos que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sqrt{(r_x \cos\theta_x - r_y \cos\theta_y)^2 + (r_x \operatorname{sen}\theta_x - r_y \operatorname{sen}\theta_y)^2} \\ &= \sqrt{\begin{aligned} &r_x^2 \cos^2\theta_x - 2r_x r_y \cos\theta_x \cos\theta_y + r_y^2 \cos^2\theta_y \\ &+ r_x^2 \operatorname{sen}^2\theta_x - 2r_x r_y \operatorname{sen}\theta_x \operatorname{sen}\theta_y + r_y^2 \operatorname{sen}^2\theta_y \end{aligned}} \\ &= \sqrt{r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_y \cos(\theta_x - \theta_y)} \end{aligned}$$

(Véase RB 10)



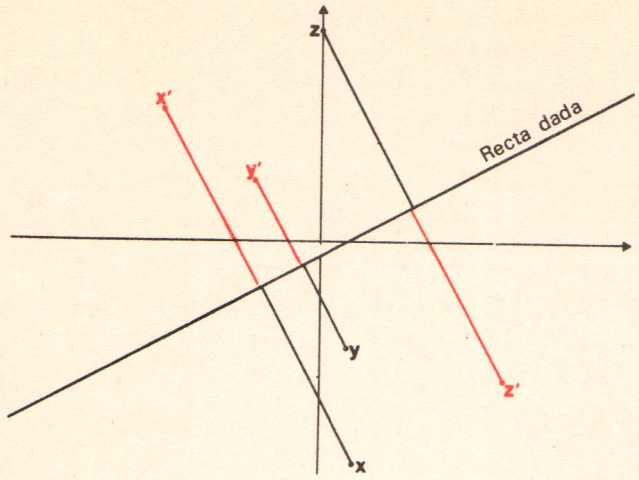
Así, si x y y rotan un ángulo ψ alrededor del origen para tener ahora las posiciones $(r_x, \theta_x + \psi)$, $(r_y, \theta_y + \psi)$, entonces la distancia entre estos puntos es

$$\sqrt{r_x^2 + r_y^2 - 2r_x r_y \cos((\theta_x + \psi) - (\theta_y + \psi))} = d(x, y).$$

Nos preguntamos si la misma preservación de la distancia se produce cuando se efectúan rotaciones alrededor de otros puntos diferentes del origen. Podemos ver que esto debe ser así puesto que podemos realizar una traslación del origen y llevarlo al nuevo centro de rotación, de manera que la rotación ocurra alrededor del origen, lo cual, como ya sabemos, preserva la distancia. (Intuitivamente, la distancia no depende de la escogencia de las coordenadas, de modo que las rotaciones alrededor del origen o alrededor de cualquier otro punto deben tener el mismo efecto sobre la distancia.)

Así, pues, ya tenemos las *traslaciones* y las *rotaciones* como dos trasformaciones que preservan la distancia.

Otra trasformación sencilla de R^2 es la que *refleja* cada punto en una recta dada (como si la recta fuera un espejo). Por ejemplo, los puntos x, y, z, que aparecen en el siguiente diagrama, están aplicados a los puntos x', y', z'. Intuitivamente, el diagrama nos permite ver que todas las distancias entre cualesquiera pares de puntos de R^2 se conservan intactas en esta trasformación.



Ejercicio 1

Ejercicio 1
(4 minutos)

Demostrar que la trasformación que refleja cada punto $x \in R^2$ en una recta cualquiera dada preserva la distancia en R^2. ■

Discusión
* *

Las tres trasformaciones $R^2 \longmapsto R^2$, *traslación, rotación* y *reflexión,* poseen la propiedad de preservar la distancia entre dos puntos cualesquiera. Esto es, si $x \longmapsto x'$, $y \longmapsto y'$ mediante alguna de estas trasformaciones, entonces

$$d(x, y) = d(x', y').$$

Definición 1
* *

Por consiguiente, decimos que la *distancia* es *invariable* en estas trasformaciones. La geometría elemental comprende un estudio de las propiedades que son invariables en estas propiedades que suelen llamarse trasformaciones rígidas o isometrías. Dos figuras son *equivalentes* en la geometría elemental, es decir, *congruentes,* si una figura puede obtenerse de otra por medio de una o más isometrías. (La *congruencia* es una relación de equivalencia.) Se puede demostrar que toda isometría se puede expresar como una composición de los tres tipos particulares de trasformaciones que estamos discutiendo. Existe un resultado más fuerte: toda isometría es la composición de, a lo sumo, tres reflexiones. (Las demostraciones de estas proposiciones se pueden encontrar, por ejemplo, en H. Liebeck, *Algebra for Scientists and Engineers* (John Wiley, 1969).)

En la *Unidad 30, Grupos I,* hemos discutido las traslaciones, rotaciones y reflexiones. La isometría identidad consiste en "no hacer nada". La inversa de una traslación es una traslación; la inversa de la rotación θ es la rotación $-\theta$; toda reflexión es su propia inversa. Sabemos que ciertos conjuntos de isometrías forman grupos respecto a la composición de funciones. En particular, el conjunto de todas las isometrías del plano forma un grupo de orden infinito.

Solución 1

Solución 1

Primero consideremos las reflexiones en el eje 1. Tenemos que

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, -x_2)$$

$$(y_1, y_2) \longmapsto (y_1, -y_2).$$

De donde,

$$\begin{aligned} &d((x_1, -x_2), (y_1, -y_2)) \\ &\quad = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (-x_2 - (-y_2))^2} \\ &\quad = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &\quad = d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \end{aligned}$$

es decir,

se preserva la distancia.

Ahora bien, una reflexión en *cualquier* recta que corte al eje x es equivalente a una rotación (enviar la recta dada al eje x), seguida de una reflexión en el eje x, seguida finalmente de la inversa de la rotación original. Si la recta es paralela al eje x, se requiere una traslación en vez de una rotación. Por tanto, también se preserva la distancia. ■

35.2.2 Semejanzas

35.2.2

Discusión

* *

Consideraremos ahora una clase diferente de trasformaciones $f: R^2 \to R^2$, donde todas las distancias quedan multiplicadas por un factor fijo $m > 0$. Esto significa que, si $x, y \in R^2$, entonces

$$d(f(x), f(y)) = m \times d(x, y).$$

Tales trasformaciones se llaman semejanzas.

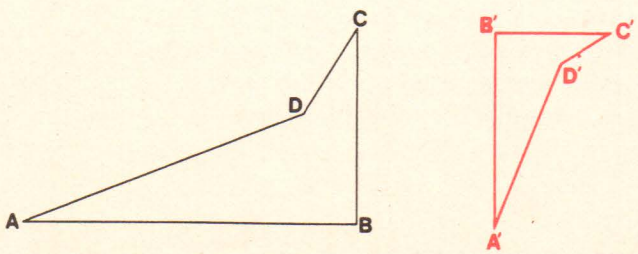
Definición 1

* *

Cuando $m > 1$, la trasformación se llama *dilatación*. Cuando $m < 1$, se llama *contracción*. Cuando $m = 1$, la trasformación es una isometría.

Ahora bien, por la misma definición, la distancia *no* es invariable en la dilatación y en la contracción. Existe, sin embargo, un buen número de invariables. Se preservan las líneas rectas (esto es, las rectas siguen siendo rectas), se preservan los ángulos y se preserva la "forma".

El estudio de las propiedades que se preservan en la dilatación y en la contracción, conjuntamente con las isometrías, se llama *geometría de la semejanza*. Dos figuras son *equivalentes* en esta geometría, es decir, son *semejantes*, si una puede obtenerse de la otra mediante una o más semejanzas. (La relación de *semejanza* es una relación de equi-



valencia.) En esta geometría, *equivalencia* deja de ser lo mismo que *congruencia*. Las figuras congruentes son, ciertamente, equivalentes pero, además, todos los triángulos semejantes, por ejemplo, son también equivalentes. Así, son equivalentes las dos figuras que se muestran en la página anterior.

En la geometría de la semejanza tenemos que todos los círculos son equivalentes, todos los cubos son equivalentes, todas las esferas son equivalentes y así sucesivamente.

El inverso de una dilatación es una contracción, y viceversa. Algunos conjuntos de semejanzas forman grupos respecto a la composición. En particular, el conjunto de todas las semejanzas del plano forman un grupo de orden infinito.

Ejercicio 1

Ejercicio 1
(2 minutos)

¿Cuáles de las siguientes son invariables en la geometría de la semejanza?

(i) la razón entre distancias;
(ii) área;
(iii) regularidad de polígonos;
(iv) la forma parabólica;
(v) la longitud de los perímetros;
(vi) el paralelismo. ■

35.2.3 Otras geometrías

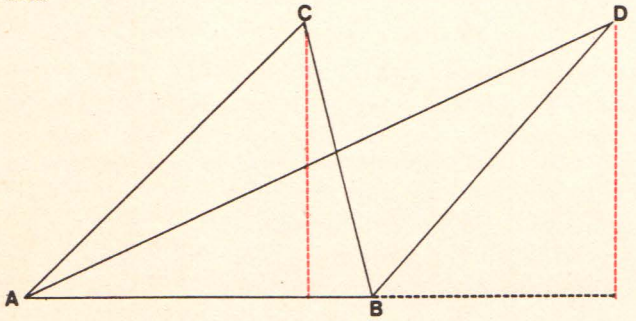
35.2.3

Discusión
* *

Hay otras geometrías en las que se permiten otras trasformaciones además de las semejanzas. Si en R^2 permitimos la trasformación

$$(x_1, x_2) \longmapsto (ax_1 + bx_2 + l, cx_1 + dx_2 + m),$$

donde $a, b, c, d, l, m \in R$ y $ad \neq bc$, entonces encontramos que no se preservan ni las distancias, ni las áreas, ni los ángulos, ni aun las formas. Los cuadrados se pueden aplicar a paralelogramos; las circunferencias se pueden aplicar a elipses. Así, en la nueva geometría, formas diferentes, de todas clases, pueden ser equivalentes. Esta geometría se llama *geometría afín*. ¿Cuáles son los invariables en esta trasformación? Aún hay un buen número de invariables muy importantes: los puntos de una recta aún dividen a los segmentos de recta en la misma razón, las configuraciones finitas siguen siendo finitas, se conserva el paralelismo, etc. Una trasformación, que está permitida en la geometría afín, que se conoce como desviación, es la que aplica un triángulo ABC a otro triángulo ABD que tiene la misma base AB y la misma altura.



(continúa en la página 14)

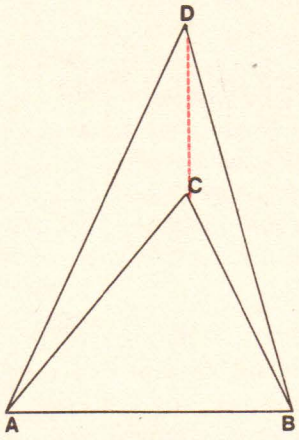
Solución 35.2.2.1

Solución 35.2.2.1

(i) Invariable.
(ii) No es invariable. El área es un producto de distancias, y la distancia no es invariable.
(iii) Invariable.
(iv) Invariable.
(v) No es invariable. El perímetro es una suma de distancias.
(vi) Invariable. ■

(viene de la página 13)

Si los triángulos tienen la misma base pero diferentes alturas, entonces la trasformación es una *deformación*.



En esta geometría todos los triángulos son equivalentes.

(Otra geometría, que da otro paso adelante, es la *geometría proyectiva*. Es usual en esta geometría adoptar una clase especial de coordenadas, que no discutiremos aquí. Así, pues, no daremos ninguna expresión general de la trasformación proyectiva en R^2. (De una manera muy general podemos considerar que esa trasformación es una proyección en perspectiva de una figura desde un punto exterior a ella, tal como ocurre cuando se toma una fotografía.) Perdemos aquí los invariables del paralelismo, de la razón en que los puntos dividen a los segmentos de recta y de la propiedad especial de lo finito. Un cuadrado puede estar aplicado, por ejemplo, a un cuadrilátero cualquiera. No obstante, aún quedan algunos invariables obvios: las rectas continúan siendo rectas y, en particular, se preserva la siguiente razón de longitudes de segmentos:

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$$

donde A, B, C y D son puntos cualesquiera de una recta.)

35.2.4 Topología

35.2.4

Tema principal
* * *

Para llegar al concepto de *topología* aumentaremos el número de trasformaciones permitidas y admitiremos toda trasformación continua uno a uno cuya inversa también sea continua. De tal trasformación se dice que es bicontinua. Ya tenemos una definición formal de trasformación continua en R^n, y que la trasformación tiene que ser uno

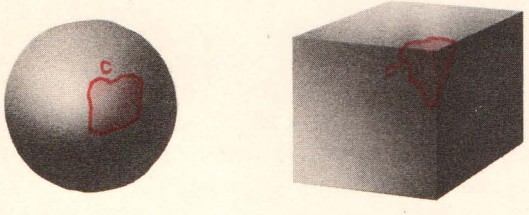
Definición 1
* * *

a uno significa que cada punto estará aplicado a un punto imagen único que, a su vez, tendrá como imagen al punto original cuando se considere la trasformación inversa. Por consiguiente, ahora permitimos las llamadas deformaciones *elásticas* que estiran, encogen, voltean, tuercen, etc. Sin embargo, no podemos rasgar ni unir partes separadas pero podemos hacer y deshacer nudos. En otras palabras, los puntos *adyacentes* deben seguir siendo adyacentes, es decir, no se deben alterar las *vecindades* o *entornos*. (No importa lo que hagamos durante el proceso de la trasformación, con tal que el resultado final se adapte a nuestras reglas. Dicho de otro modo, no nos preocupan los mecanismos de la trasformación; solamente nos interesan las posiciones inicial y final.)

Definición 2
* * *
Definición 3
* *

La topología es el estudio de las propiedades de las estructuras que permanecen invariables en las traformaciones bicontinuas. Tales trasformaciones se llaman trasformaciones topológicas. Puede parecer, a primera vista, que los invariables que aún subsisten son tan pocos que casi todas las estructuras resultarán equivalentes. Este no es nuestro caso. Los invariables topológicos son, por su naturaleza, más fundamentales que los de las geometrías que hemos discutido y, por ésa razón, son de una aplicación mucho más extensa en matemática. Terminaremos esta sección mostrando dos ejemplos de invariables topológicos en nuestro espacio geométrico usual.

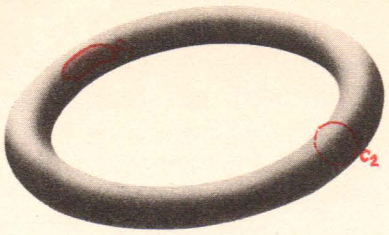
Consideremos, por ejemplo, lo que sucede si una curva continua cerrada cualquiera C en la superficie de una esfera. Intuitivamente podemos ver que la curva divide la superficie de la esfera en dos partes distintas. Para ir de un punto de una de esas partes de la superficie a un punto situado en la otra parte, es necesario pasar a través de la curva C.



Una esfera se puede trasformar, mediante una trasformación topológica, en un cubo y, por tanto, una esfera y un cubo son topológicamente equivalentes. Si mediante una trasformación topológica aplicamos la esfera, con su curva cerrada C, a un cubo, entonces la superficie del nuevo objeto estará también dividida en dos partes distintas por la curva continua y cerrada C' que es la imagen de la curva original C. Así, la propiedad particular que hemos descrito es un invariable topológico de esta trasformación.

Consideremos ahora un objeto conocido por el nombre de *toro*, que es algo así como una rosquilla o un neumático inflable. Las curvas C_1 y C_2 son, ambas, curvas cerradas y continuas trazadas en la superficie del toro.

La curva C_1 tiene exactamente la misma propiedad de separar la superficie en dos partes que tiene la curva C de la esfera, pero la curva C_2 no tiene esa propiedad. Es posible ir desde un punto situado a "un lado" de C_2 hasta un punto del otro "lado", dando la vuelta a lo



largo del toro y sin cortar la curva C_2. No es posible trazar en la superficie de la esfera una curva que tenga la propiedad que tiene C_2. La esfera y el toro no son topológicamente equivalentes porque, si lo fueran, la misma trasformación que aplica el toro a la esfera aplicaría también la curva C_2 del toro a una curva que, trazada sobre la superficie de la esfera, tuviera las mismas propiedades, y esa curva no existe en la esfera.

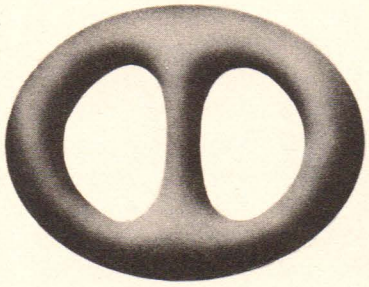
Ejercicio 1

Ejercicio 1
(5 minutos)

(i) ¿De qué otra manera se puede trazar una curva cerrada y continua, sobre la superficie de un toro, de modo que no separe la superficie en dos partes distintas?

(ii) ¿Cuál es el mayor número de curvas cerradas, continuas y que no se intersecan, que se puede trazar en la superficie de un toro sin que la superficie quede dividida en partes distintas?

(iii) Si el toro tiene dos huecos, como se muestra en la figura, ¿será su respuesta la misma que en (ii)?

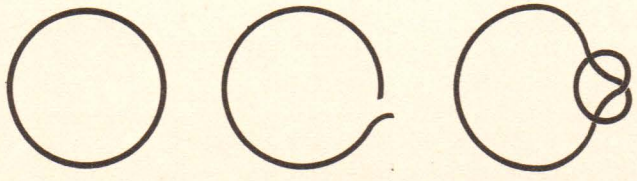


■

Discusión
* *

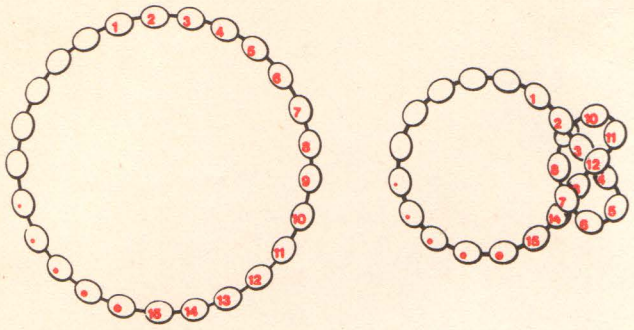
El número de curvas cerradas que se pueden trazar sobre una superficie particular sin que la curva quede dividida en partes distintas es un *invariable topológico*, esto es, continúa siendo el mismo a través de cualquier trasformación topológica de la superficie.

Supongamos, ahora, que tomamos una circunferencia, la cortamos por algún punto, la abrimos y hacemos un nudo; después, pegamos los extremos exactamente igual como estaban al principio. El proceso está representado en los pasos (a), (b) y (c) del diagrama.



(a) (b) (c)

Esta es, también, una trasformación continua uno a uno; una importante propiedad que se preserva en ella es el *orden* de los puntos en la circunferencia. Podemos pensar en las cuentas de un collar que están numeradas 1, 2, 3, . . . , n.



Aunque hemos cortado el collar, hecho un nudo y reparado el corte, el orden de las cuentas continúa exactamente igual que en el original.

35.3 Conjuntos abiertos y espacios topológicos

35.3

35.3.0 Introducción

35.3.0

Introducción
* *

Lo que hemos visto hasta ahora se conoce como *topología métrica* porque hemos usado la *métrica* o función distancia $d(x, y)$ en nuestra definición de trasformación continua.

Puesto que la distancia deja de ser un invariable tan pronto cambiamos la isometría por la semejanza, es obvio que la distancia no es un invariable topológico.

Como la topología es tan fundamental, es deseable (y en última instancia, esencial) que el concepto de trasformación continua se vuelva a definir en términos que no incluyan la noción de distancia.

No podemos, sin embargo, hacerlo sin examinar más profundamente el concepto de "cercanía". Al comenzar, tenemos que continuar hablando en términos de distancia (puesto que la topología métrica es todo lo que tenemos hasta ahora), pero intentaremos, en cuanto sea posible, formular conceptos que no sean métricos.

35.3.1 Vecindades

35.3.1

Tema principal
* * *

Dado un punto cualquiera $x \in R^n$, se puede definir un conjunto de puntos *cercano* a x (o que está *cerca de* x) como el conjunto de puntos $y \in R^n$ tales que

$$d(x, y) < r,$$

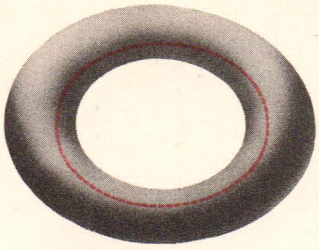
para algún número real fijo $r > 0$. Estos puntos forman lo que se llama una *vecindad* o *entorno* de x en R^n, que consiste únicamente en

(continúa en la página 18)

Solución 35.2.4.1

Solución 35.2.4.1

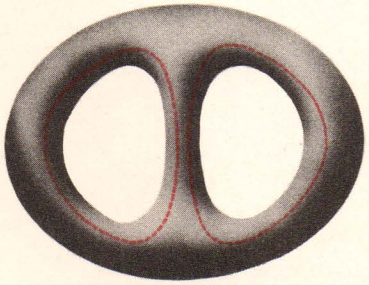
(i)



La línea de puntos muestra una curva que posee la propiedad requerida.

(ii) Solamente se puede trazar *una* curva sin dividir al toro en partes distintas.

(iii) La respuesta no será la misma. Se pueden trazar, sin dividir la superficie, dos curvas cerradas que no se intersecan.



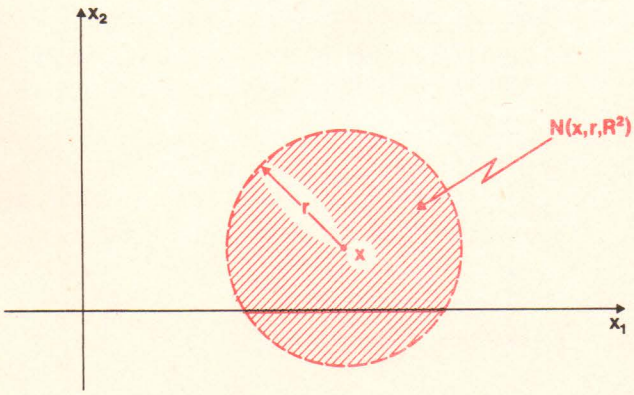
■

(viene de la página 17)

los puntos de R^n cuya distancia a x es menor que r. Esta vecindad se denota por

$$N(x, r, R^n).$$

Por ejemplo, en dos dimensiones podemos tener lo siguiente:



En este caso, la vecindad está formada únicamente por el conjunto de puntos que están *dentro* del círculo de centro x y radio r.

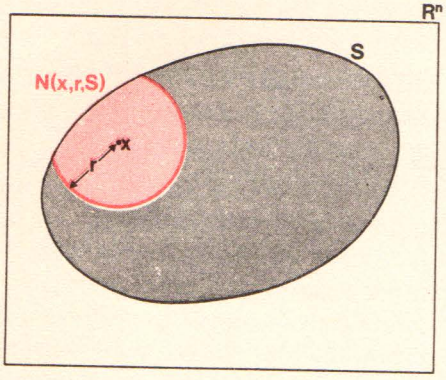
Más generalmente, para cualquier conjunto S (que esté contenido en R^n, de modo que la métrica esté definida) y para cualquier $x \in S$ y cualquier $r > 0$, se tiene que una vecindad de x en S es el conjunto de todos los puntos y de S tales que

Definición 1
★ ★ ★

$$d(x, y) < r.$$

Esta vecindad se denota por $N(x, r, S)$.

Notación 1
★ ★ ★



Observe que x pertenece a todas sus vecindades.

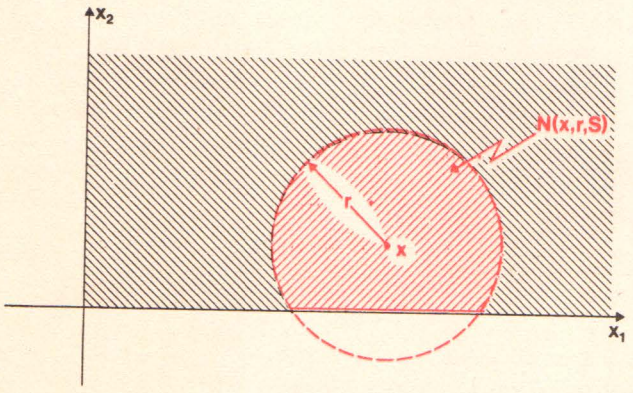
En adelante, usaremos frecuentemente el símbolo S para denotar el "espacio" en el cual estamos trabajando en ese momento. Los puntos que no pertenecen a S no nos interesan; más aún, para todos los propósitos de *nuestro* trabajo, esos puntos *no* existen. La única razón por la cual escribimos $S \subseteq R^n$ es para recordar lo que es la métrica (función distancia): necesitamos saberlo para poder determinar las vecindades de los puntos de S.

Como veremos más adelante, un "'espacio" es precisamente un conjunto en el cual están definidas las vecindades; pero, antes, debemos avanzar más en el concepto de vecindad.

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Trabajando de nuevo en dos dimensiones, supongamos que S es el subconjunto de R^2 formado por todos los puntos cuyas dos coordenadas son positivas.



Esta vez, la vecindad de x no es un círculo completo: se excluye la parte del círculo que está en el mismo eje x o por debajo de él. ■

Ejercicio 1

Ejercicio 1
(2 minutos)

Describa las siguientes vecindades.

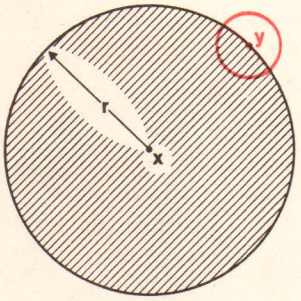
(i) $N(x, r, R)$
(ii) $N(x, r, R^3)$. ■

35.3.2 Frontera

35.3.2

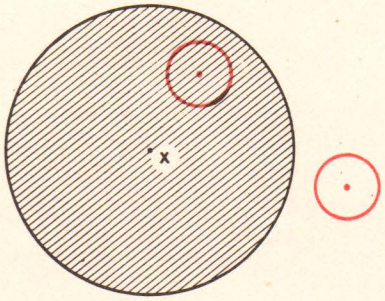
Discusión
* *

Observe que nuestra definición de vecindad ha sido formulada de tal manera que excluye todos los puntos que están, exactamente, a una distancia r de x; es decir, la frontera no forma parte de la vecindad. Veamos si podemos definir con precisión lo que entendemos por *frontera*.



Aquí tenemos un círculo en R^2, cuyo centro es x y cuyo radio es r. Tenemos también un punto y colocado en la *circunferencia*. Mostramos una vecindad típica de y.

Como el círculo está sombreado, es fácil ver que cualquier vecindad de y en R^2 tendrá una parte sombreada y una parte no sombreada. En otras palabras, debe incluir algunos puntos de $N(x, r, R^2)$ y algunos puntos que no están en $N(x, r, R^2)$.



Esto no se verifica en otros puntos de R^2 que no están en la frontera, como se muestra en el diagrama anterior. Algunos puntos tienen (algunas) vecindades completamente sombreadas, y algunos puntos tienen (algunas) vecindades que no están sombreadas en lo absoluto. De hecho, cualquier punto cuya distancia a x sea $r - s$ o $r + s$ tie-

ne *todas* sus vecindades de radio s o menor que s completamente sombreadas o sin sombra alguna.

Así, pues, la frontera se caracteriza por ser el conjunto de puntos tales que *todas* sus vecindades están *parcialmente dentro* del círculo y *parcialmente fuera* de él.

Tema principal
* * *

Ahora definimos la frontera para cualquier punto de R^n.

Si $X \subseteq S \subseteq R^n$, entonces un punto $p \in S$ es un punto frontera de X en S si *toda* vecindad de p en S incluye al menos un punto de X y al menos un punto de S que no esté en X. La frontera de X en S es el subconjunto de R^n que consiste en todos los puntos fronteras de X.

Definición 1
* * *
Definición 2
* * *

Por ejemplo, la frontera de $[a, b]$ o $]a, b[$ en R es $\{a, b\}$.

Hemos definido *frontera* en términos de *vecindad*, y utilizaremos estos dos conceptos para definir uno o dos conceptos en términos de ellos. Eventualmente propondremos una definición más general de *continuidad*. Recordemos que queremos definir la continuidad en términos que nada tengan que ver con la métrica. Sin embargo, la definición de vecindad contiene la idea de distancia, de modo que puede parecer que no estamos progresando. No obstante, no es así; eventualmente remplazaremos la vecindad misma y obtendremos, de ese modo, una definición de continuidad que estará completamente libre de la métrica.

35.3.3 Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados

35.3.3

Con la vecindad definida de la manera en que aparece en la Sección 35.3.1, se excluye específicamente la frontera. Esto nos lleva a las siguientes definiciones:

Tema principal
* * *

Todo subconjunto de $S \subseteq R^n$ que excluya *todos* sus puntos frontera es un conjunto abierto en S.

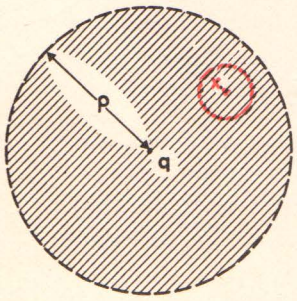
Definición 1
* * *

Por ejemplo, el intervalo abierto $]a, b[$ es un conjunto abierto en R. Todo subconjunto de $S \subseteq R^n$ que incluya *todos* sus puntos frontera es un conjunto cerrado en S.

Definición 2
* * *

Por ejemplo, el intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto cerrado en R.

Los conjuntos abiertos tienen una propiedad importante: como ningún punto de un conjunto abierto puede ser, al mismo tiempo, un punto frontera, se sigue que todo punto x de un conjunto abierto X de S debe tener *alguna* vecindad que *no* incluya simultáneamente puntos de X y puntos que no pertenecen a X (en esto, precisamente, se diferencia cualquier vecindad de un punto frontera). Puesto que x pertenece a todas y cada una de sus vecindades, deducimos que debe tener al menos una vecindad que esté completamente comprendida en X.



(continúa en la página 22)

Solución 35.3.1.1

Solución 35.3.1.1

(i) Lo que se describe es el conjunto de todos los números reales cuya diferencia, respecto a x, sea menor que r. Entonces,

$$N(x, r, R) = \{y : x - r < y < x + r\} =]x - r, x + r[.$$

(ii) Aquí, $N(x, r, R^3)$ es el interior de la esfera cuyo centro es x y cuyo radio es r. ■

(viene de la página 21)

Por ejemplo, consideremos el círculo abierto en R^2, de centro q y radio ρ. Para cualquier x del círculo (cuya distancia al centro q será, por consiguiente, $\rho - d$), tendremos que la vecindad $N(x, r, R^2)$ está completamente comprendida dentro del círculo, supuesto que $r \leqq d$. Por definición, las vecindades son siempre abiertas pero recuerde que el hecho de ser "abierto" es una propiedad que ha de referirse, necesariamente, al conjunto S. Con frecuencia, tomamos S como R^n, pero algunas veces es un subconjunto de R^n. El ejercicio siguiente ilustra este punto.

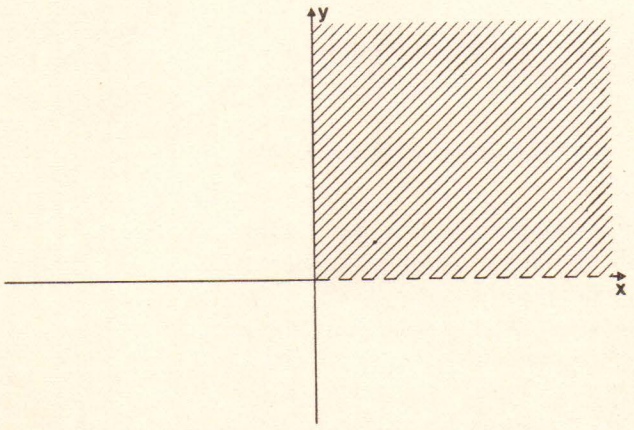
Ejercicio 1

Ejercicio 1
(4 minutos)

(i) Demostrar que la vecindad $N(x, r, S)$ del ejemplo 35.3.1.1 es un conjunto abierto en S.
(ii) Demostrar que eso también es cierto si S incluye el semieje positivo horizontal. ■

Muchos conjuntos incluyen algunos, pero no todos, de sus puntos frontera; por consiguiente, no son abiertos ni cerrados.

Tema principal
* * *



El área sombreada muestra el subconjunto de R^2 que consiste en todos los puntos de coordenadas (x, y) tales que $x \geqq 0$ y $y > 0$.

La frontera de este subconjunto de R^2 consiste en los semiejes no negativos. Mientras que el semieje positivo vertical pertenece al conjunto, ni el origen ni ninguna parte del eje x están incluidos en él. Por tanto, el conjunto *ni* es abierto *ni* es cerrado; incluye algunos, aunque no todos, de los puntos frontera.

Aunque parezca extraño, es posible que un conjunto sea, *al mismo tiempo,* abierto y cerrado. Consideremos el conjunto vacío, $\varnothing$. Puesto que $\varnothing$ no contiene punto alguno, no puede contener ningún punto frontera. Por tanto, es abierto por definición. Ahora bien, según la definición de punto frontera, un conjunto que carece de puntos no puede tener puntos frontera (toda vecindad de un punto frontera tiene que incluir un punto del conjunto, y este conjunto no tiene puntos); por tanto, la frontera de $\varnothing$ es también el conjunto vacío, $\varnothing$. Como sabemos que $\varnothing$ contiene a $\varnothing$, podemos asegurar que el conjunto vacío contiene toda su frontera. Por tanto, $\varnothing$ es cerrado por definición. Podemos encontrar otros muchos ejemplos con esta propiedad. Otro conjunto que es abierto y cerrado es el conjunto S mismo. Toda vecindad de un punto de S contiene, por definición, únicamente puntos de S, de manera que la frontera de S es $\varnothing$ en S, y S, por consiguiente, es abierto. Por la misma razón, S es también cerrado: como su frontera es $\varnothing$, tenemos que S contiene el conjunto de todos sus puntos frontera, es decir, el conjunto vacío.

Ejercicio 2

Ejercicio 2
(4 minutos)

(i) Demostrar que el intervalo $[0, 1[$ de R, esto es, el conjunto de todos los $x \in R$ tales que

$$0 \leqslant x < 1,$$

ni es abierto ni es cerrado en R.

(ii) Considerando las vecindades, demuestre que $[0, 1[$ es, al mismo tiempo, abierto y cerrado cuando se toma como un subconjunto de sí mismo. ■

Tema principal
* * *

Aunque muchos conjuntos no son abiertos ni cerrados, no es difícil construir conjuntos abiertos o conjuntos cerrados, a partir de cualquier conjunto dado.

Definición 3
* * *

Por ejemplo, si de un conjunto cualquiera $X \subseteq S$ quitamos todos sus puntos frontera, obtenemos un conjunto abierto que llamamos interior de X en S.

Definición 4
* * *

También podemos construir conjuntos cerrados, a voluntad. Lo único que tenemos que hacer es añadir a cualquier conjunto X, en S, todos sus puntos frontera en S. Por definición, el resultado debe ser un conjunto cerrado en S, que llamamos clausura de X en S.

Cuando X es un conjunto abierto en S, *todo* punto de X es punto interior. Todo punto de un conjunto abierto X está realmente *dentro de* X: se puede encerrar en una vecindad formada totalmente por puntos de X.

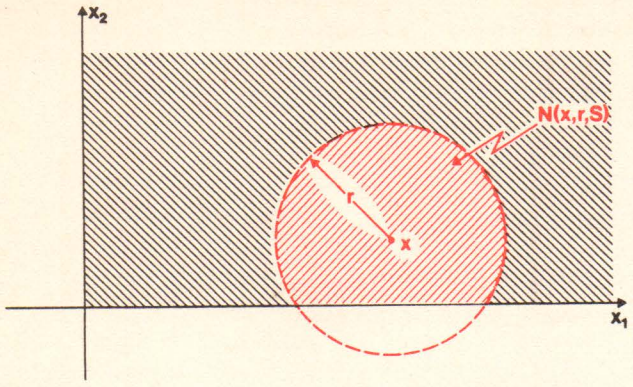
Se sigue que la unión de cualquier número de conjuntos abiertos ha de ser, a su vez, un conjunto abierto porque *todo* punto de la unión debe pertenecer al menos a uno de los conjuntos, y debe tener una vecindad contenida totalmente en ese conjunto y que, por tanto, está comprendida totalmente en la unión. Por consiguiente, ese puntó no puede convertirse en un punto frontera de la unión. En consecuencia, la unión de cualquier número de conjuntos abiertos es, a su vez, un conjunto abierto.

Con las intersecciones de conjuntos abiertos debemos tener un poco más de cuidado. Consideremos los siguientes conjuntos abiertos, que son subconjuntos de R:

(continúa en la página 24)

Solución 1 **Solución 1**

(i) La frontera de $N(x, r, S)$ está formada por el arco de circunferencia que se encuentra por arriba del eje horizontal. No incluye ninguna parte del eje horizontal porque los puntos del eje están explícitamente excluidos de S.



Puesto que ningún punto de la circunferencia pertenece a $N(x, r, S)$ ya que están a una distancia r de x, la vecindad no contiene ningún punto frontera y, por tanto, es abierta por definición.

(ii) Cuando S incluye el eje horizontal, entonces, además de los dos puntos donde se intersecan la circunferencia y el eje, la frontera es la misma que se describió anteriormente, aunque $N(x, r, S)$ incluye ahora la parte del eje horizontal que queda dentro del círculo. Estos puntos *no* pertenecen a la frontera. Recuerde que sus vecindades son semicirculares y no incluyen ninguno de los puntos que están por debajo del eje. La intuición falla en casos como éste, en parte porque la intuición nos lleva a suponer que una "frontera" es una curva cerrada, pero esa es una propiedad que no se puede implicar de nuestra definición. ■

Solución 2 **Solución 2**

(i) La frontera de $[0, 1[$ en R consta de los dos puntos 0 y 1, es decir, es el conjunto $\{0, 1\}$. De estos puntos, 0 pertenece a $[0, 1[$, de modo que el intervalo no es abierto; por otra parte, 1 no pertenece a $[0, 1[$, de modo que el intervalo no es cerrado.

(ii) Como subconjunto de sí mismo, $[0, 1[$ tiene por frontera el conjunto vacío, $\varnothing$, puesto que, por ejemplo, las vecindades de 0 con respecto a $[0, 1[$ no incluyen números negativos sino solamente puntos de $[0, 1[$.

Puesto que $[0, 1[$ no contiene ningún punto frontera, es abierto por definición. Del mismo modo, el conjunto $[0, 1[$ contiene el conjunto vacío, que es su frontera, y es, por consiguiente, cerrado por definición. ■

(viene de la página 23)

$$\{x: -1 < x < 1\}$$

$$\{x: -\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2}\}$$

$$\{x: -\tfrac{1}{3} < x < \tfrac{1}{3}\}$$

...

$$\left\{x: -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}\right\}$$

...

Esta es una sucesión infinita de conjuntos abiertos de R.

$$]-1, 1[,]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}[, \ldots,]-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}[, \ldots$$

El único punto que pertenece a *todos* esos conjuntos es el origen, 0. Por tanto, su intersección es el conjunto monario $\{0\}$. Este conjunto no es abierto en R porque $N(0, r, R)$ no es un conjunto monario, cualquiera que sea $r > 0$; por consiguiente, contiene al menos un punto de R que no está en $\{0\}$, de modo que $\{0\}$ no es abierto en R.

Ejercicio 3

Ejercicio 3
(5 minutos)

Demostrar que $\{0\}$ es un conjunto cerrado en R. ■

Discusión
* * *

Ahora bien, si limitamos nuestra consideración a un número *finito* de intersecciones de conjuntos abiertos, encontramos que la intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto. No demostraremos este resultado pero usted puede intentar hacerlo. Observe que la intersección de dos conjuntos abiertos disjuntos es el conjunto vacío, que ya sabemos que es abierto.

35.3.4 Resumen

35.3.4
Resumen
* * *

Resumiremos ahora los puntos principales que hemos discutido en esta sección.

La distancia $d(x, y)$ entre dos puntos $x, y \in R^n$ tiene las propiedades siguientes:

(i) $d(x, y) \geqslant 0$
(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(iii) $d(x, y) = d(y, x)$
(iv) $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$.

La vecindad $N(x, r, S)$ de x, de radio r, en S es el conjunto de todos los puntos $y \in S$ tales que

$$d(x, y) < r,$$

donde $x \in S \subseteq R^n$ y $r > 0$.

La frontera, en S, de un conjunto $X \subseteq S \subseteq R^n$ es el conjunto de todos los puntos frontera $p \in S$ tales que, para todo $r > 0$, $N(p, r, S)$ contiene al menos un punto de X y al menos un punto que no está en X.

Un conjunto abierto en $S \subseteq R^n$ es cualquier subconjunto de S que no contiene *ninguno* de sus puntos frontera en S.

Un conjunto cerrado en $S \subseteq R^n$ es cualquier subconjunto de S que contiene toda su frontera en S.

Todo punto de un conjunto abierto en S tiene una vecindad que está totalmente contenida en S.

La unión de cualquier número de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, y la intersección de un número finito de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

El conjunto vacío $\varnothing$ y el conjunto universo S son, al mismo tiempo, abiertos y cerrados.

Solución 35.3.3.3

Solución 35.3.3.3

Toda vecindad de 0 en R contiene el punto 0 y, además, otros puntos que no están en $\{0\}$. Por tanto, 0 es un punto frontera de $\{0\}$. Es evidente que no puede haber otro. En consecuencia, $\{0\}$ incluye todos sus puntos frontera y, por tanto, es cerrado. ■

35.3.5 Continuidad

35.3.5

Tema principal
★ ★ ★

Usted puede haber observado que las definiciones, excepto la de vecindad, están expresadas en términos no métricos. En realidad todas ellas dependen del concepto de vecindad pero, si pudiéramos definir *vecindad* de alguna otra manera, tendríamos una estructura que sería independiente del concepto de distancia.

Antes de intentarlo, debemos estar seguros de que las ideas que hemos desarrollado servirán para lo que queremos de ellas. Específicamente, ¿se puede redefinir la continuidad en estos términos?

En la Sección 35.1.2 definimos una función continua

$$f: X \longrightarrow Y$$

en términos de la distancia. Esta definición puede llevarse inmediatamente a términos de vecindades.

Así, si $X \subseteq R^m$ y $Y \subseteq R^n$, entonces una función

$$f: X \longrightarrow Y$$

es continua en un punto $x \in X$ si, dado cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que, siempre que

Definición 1
★ ★ ★

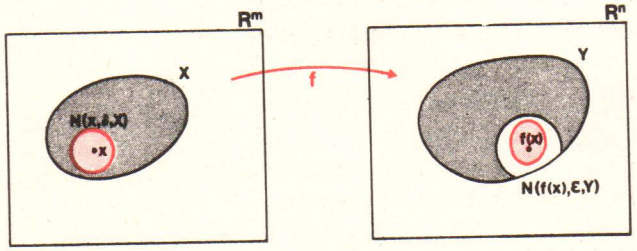
$$y \in N(x, \delta, X), \qquad (y \text{ esté "cerca" de } x)$$

entonces

$$f(y) \in N(f(x), \varepsilon, Y) \qquad (f(y) \text{ esté "cerca" de } f(x))$$

es decir,

$$f(N(x, \delta, X)) \subseteq N(f(x), \varepsilon, Y).$$



En otras palabras, $f: X \to Y$ es *continua* en $x \in X$ si, para *toda* vecindad de $f(x)$ en Y, existe alguna vecindad de x en X cuya imagen esté contenida en la vecindad dada de $f(x)$ en Y. En el diagrama, $N(x, \delta, X)$ y su imagen $f(N(x, \delta, X))$ están coloreadas; $N(f(x), \epsilon, Y)$ es el subconjunto de Y que se ha dejado en blanco.

Obsérvese que, para la "cercanía", primero se menciona el conjunto del codominio. Esto es, pedimos que, una vez determinado el conjunto del codominio (no importa cuán pequeño sea ϵ), podamos encontrar en el dominio el conjunto requerido con un valor (δ) adecuado.

Para ver si una función dada $f:X \rightarrow Y$ es continua en x seguiremos los siguientes pasos.

(i) Escoja una vecindad arbitraria de $f(x)$:

$N(f(x), \varepsilon, Y)$.

(ii) Busque una vecindad de x, $N(x, \delta, X)$, tal que

$f(N(x, \delta, X)) \subseteq N(f(x), \varepsilon, Y)$.

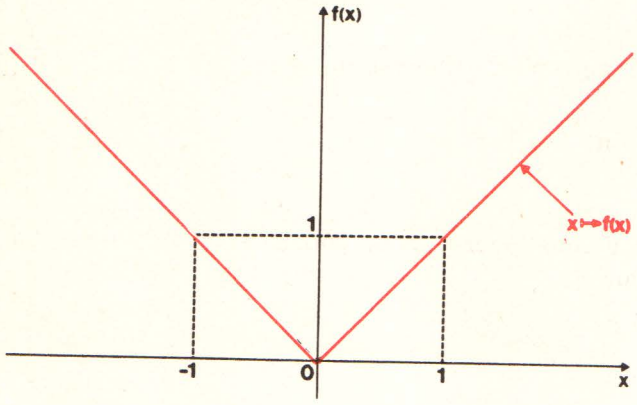
(iii) Si tal vecindad existe para *todo* $\epsilon > 0$, entonces la función es continua en x; en caso contrario, no es continua (es decir, es discontinua) en x.

Ejercicio 1

Ejercicio 1
(5 minutos)

Realice una investigación formal de la continuidad de la función

$f: x \longmapsto |x| \qquad (x \in R)$.



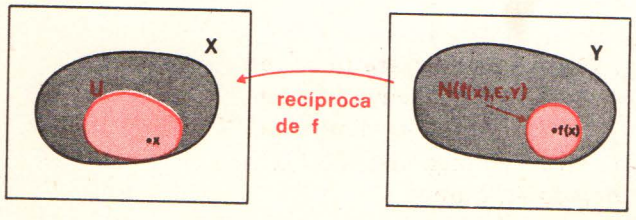
■

Veamos ahora cómo se puede llevar la definición de continuidad, que está expresada en términos de *vecindades*, a una definición en términos de *conjuntos abiertos*. La definición de vecindad nos dice que una función $f:X \rightarrow Y$ es continua en $x \in X$ si, para *todo* $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que la imagen producida por f de (lo que podemos llamar) una vecindad δ de x está dentro de la vecindad ϵ de $f(x)$. Por tanto, definimos que f es continua si la imagen que produce la recíproca de f de cualquier conjunto abierto del conjunto imagen (un subconjunto de Y) es un conjunto abierto del codominio X.

Tema principal
★ ★ ★

Definición 2
★ ★ ★

Veamos qué significa esto. Comenzamos en el conjunto imagen. Toda vecindad $N_{f(x)} = N(f(x), \varepsilon, Y)$ de $y = f(x)$ es un conjunto abierto; por tanto, suponemos que la vecindad $N(f(x), \epsilon, Y)$ de $f(x)$ es la imagen de un conjunto abierto U del dominio X tal que U contiene a x.



(continúa en la página 28)

Solución 1

Solución 1

Consideremos cualquier $x \in R$. Hagamos $y = f(x)$, i.e. $y = |x|$, de modo que $y \in R_0^+$. Entonces, toda vecindad de $y \in R_0^+$ es de la forma

$$]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\qquad \text{si } \epsilon < y$$

o de la forma

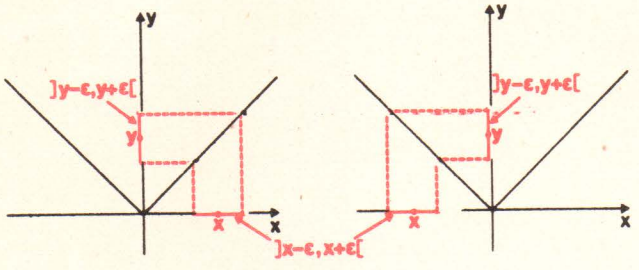
$$[0, y + \varepsilon[\qquad \text{si } \epsilon \geqq y$$

Pero tenemos que

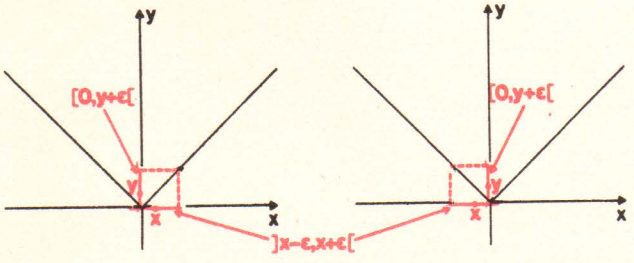
$$f(]x - \varepsilon, x + \varepsilon[) =]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\qquad \text{cuando } \epsilon < y$$

y

$$f(]x - \varepsilon, x + \varepsilon[) = [0, y + \varepsilon] \qquad \text{cuando } \epsilon \geqq y$$



el caso en el cual ε<y



el caso en el cual ε≥y

Consecuentemente, toda vecindad de $y \in R_0^+$ es la imagen, producida por f, de una vecindad de x en R (y también de una vecindad de $-x$ en R). De donde, f es continua en todos los puntos de R, es decir, f es continua.

(Observe que, de hecho, toda vecindad de $y \in R_0^+$ es la imagen de una unión de *dos* vecindades, una vecindad de x y una vecindad de $-x$. Podemos arreglar las cosas si reformulamos nuestra definición de continuidad en términos de conjuntos abiertos en vez de vecindades.) ■

(viene de la página 27)

Puesto que U es abierto en X, podemos escoger una vecindad $N_x = N(x, \delta, X)$ de x que esté totalmente comprendida en el conjunto abierto U.

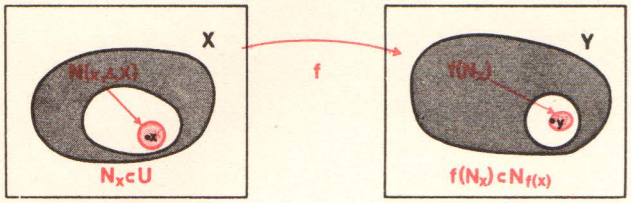
Ahora,

$$f(U) = N_{f(x)}$$

de modo que

$$N_x \subseteq U \Rightarrow f(N_x) \subseteq N_{f(x)},$$

y, por tanto, f es continua en x.



Así, nuestra nueva definición de continuidad implica la definición anterior. Lo que no se ve tan claramente es que también se verifique el recíproco, es decir, que la definición anterior implique la nueva. Las dos definiciones son, no obstante, equivalentes.

No demostramos aquí la equivalencia de las dos demostraciones; sin embargo, analizaremos uno o dos ejemplos específicos. Nótese que la definición de conjunto abierto se da en términos de la *aplicación recíproca* de f.

Ejemplo 1

Ejemplo 1

Primero, analizaremos nuevamente la función $f:R \to R$ definida por

$$f:x \longmapsto 0 \qquad (x \leqslant 0),$$

$$f:x \longmapsto 1 \qquad (x > 0).$$

Consideremos la aplicación recíproca, g. Entonces,

$$g:0 \longmapsto \{x:x \leqslant 0\},$$

$$g:1 \longmapsto \{x:x > 0\},$$

esto es,

$$g(0) = R_0^-, \qquad g(1) = R^+.$$

g está definida únicamente en el conjunto imagen $\{0, 1\}$ y no resulta obvio qué es lo que debemos tomar como conjuntos abiertos. Podemos salvar este inconveniente de varias maneras. Quizá la más sencilla, de acuerdo con nuestro curso, consiste en extender g de modo que su dominio sea R. Para ello, definimos

$$g(x) = \varnothing \qquad (x \in R \text{ y } x \neq 0, 1).$$

Ahora podemos considerar la imagen que produce g de cualquier conjunto abierto en R. Supongamos que tomamos el conjunto abierto $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. La imagen producida por g de cualquier punto $y \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ viene dada por

$$g(y) = R^+ \qquad (y = 1),$$

$$g(y) = \varnothing \qquad (y \neq 1).$$

Así, la imagen del conjunto abierto $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ producida por g es precisamente R^+, pero R^+ no contiene su frontera $\{0\}$. Por tanto, la imagen producida por g del conjunto abierto $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ es abierta en R. Esto se verifica también en cualquier conjunto abierto que no incluya el 0. Por consiguiente, f es continua en x, supuesto que $x \neq 0$.

Si tomamos $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, como nuestro conjunto abierto del dominio de g, estará incluido el 0 y, para cualquier punto $y \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, tendremos que

$$g(y) = R_0^- \qquad (y = 0)$$

$$g(y) = \varnothing \qquad (y \neq 0).$$

Así, la imagen del conjunto abierto $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ producida por g es R_0^-. Ahora bien, R_0^- es cerrado en R, de acuerdo con nuestra definición de conjunto cerrado, puesto que contiene su frontera $\{0\}$. Puesto que la imagen inversa de un conjunto abierto no es abierta, la función f no es continua en 0.

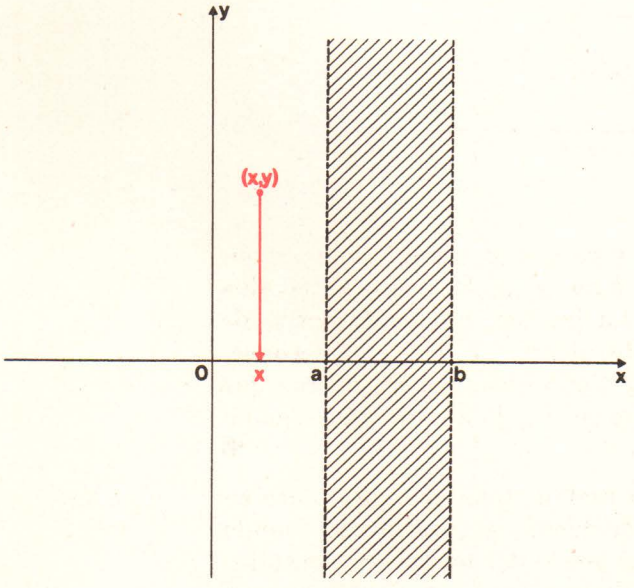
Ejemplo 2

Ejemplo 2

Consideremos ahora $f:R^2 \longmapsto R$ definida por

$$f:(x, y) \longmapsto x \qquad (x, y \in R).$$

(Esta aplicación no es sino la "aplicación proyección" que aplica cada punto (x, y) a la primera coordenada x.) Tomaremos el intervalo general abierto $]a, b[$ del codominio R y consideraremos su imagen, producida por la aplicación recíproca g.



Cualesquiera que sean los valores que escojamos para a y b, $a < b$, la imagen producida por g del conjunto abierto $]a, b[$, i.e. $g(]a, b[)$, será siempre una franja vertical infinita (como se muestra en la figura) cuyos bordes están excluidos. Los bordes están excluidos porque son las imágenes, producidas por g, de los puntos a y b que no forman parte del intervalo original $]a, b[$. Así, la imagen que produce g de $]a, b[$ es siempre un conjunto abierto en R.

La función

$$f:(x, y) \longmapsto x \qquad (x, y \in R)$$

es, por consiguiente, una función continua. ■

Ejemplo 3

Ejemplo 3

Por último, examinemos nuevamente la función

$$f:x \longmapsto |x| \qquad (x \in R).$$

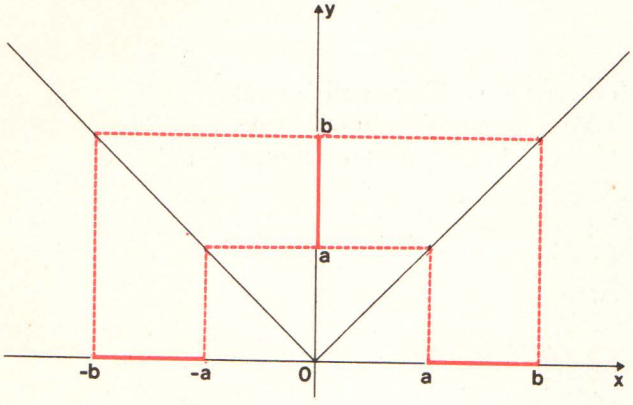
Sea $]a, b[$ algún intervalo abierto del codominio R_0^+. La imagen dada por g, la recíproca de f, de cualquier punto $y \in]a, b[$ está determinada por

$$g(y) = \{-y, y\},$$

y la imagen dada por g del intervalo abierto $]a, b[$ está determinada por

$$g(]a, b[) =]-b, -a[\cup]a, b[.$$

$]-b, -a[$ y $]a, b[$ son abiertos en R y, por tanto, su unión es abierta en R.



De cualquier manera que escojamos a y b, $a < b$, de R_0^+, siempre obtendremos un conjunto abierto en R para $g(]a, b[)$. Los intervalos $[0, c[$ también son abiertos en R_0^+. La imagen, producida por g, de uno de esos intervalos es el intervalo abierto $]-c, c[$. En consecuencia, todo conjunto abierto en R_0^+ tiene una imagen inversa que es abierta en R. Esto confirma nuestro resultado anterior: la función módulo es continua. ■

Discusión
* *

Puede ser que se pregunte por qué los matemáticos insisten tanto en ser tan precisos en las definiciones de funciones continuas, cuando parece que una aproximación intuitiva puede dar los mismos resultados que una aplicación formal de la definición. La razón no es que, simplemente, los matemáticos quieran tenerlo todo "bien lavado y planchado". En unidades anteriores hemos dicho que existen funciones cuyas gráficas no podemos trazar. Aun si nos limitamos a las funciones $f:R^m \rightarrow R^n$, encontraremos dificultades cuando m o n son mayores que 3. Existen también algunas funciones que, aunque su dominio y su codominio son iguales a R, se comportan de maneras tan extraordinarias y complicadas, que no es posible determinar si son continuas o no, si solamente las consideramos de un modo intuitivo y puramente geométrico. Pero aun estos casos son una justificación muy débil de todos los problemas que hemos tenido que sortear en esta unidad. La verdadera justificación descansa en el futuro: hemos conseguido una definición de continuidad que es independiente de la distancia, puesto que ahora la enunciamos de la siguiente manera.

Una trasformación $f:R^m \rightarrow R^n$ es continua si la imagen de cada conjunto abierto en R^n, producida por la inversa de f, es, a su vez, un conjunto abierto en R^m.

Esta definición nos permitirá aplicar las ideas de continuidad a espacios que son mucho más generales (y posiblemente más sencillos) que R^m y R^n, donde la intuición es muy difícil de aplicar. Podemos, además, estar seguros de que no obtendremos resultados que vayan contra nuestra intuición porque nuestra definición comprende la definición que se basa en el concepto de distancia pero es mucho más general. La topología se ha convertido en una vasta e importante área de la matemática, y tenemos mucho que decir de ella en cursos más avanzados.

Para terminar esta unidad saldremos de R^n y R^m. Definiremos un *espacio topológico* general y discutiremos un ejemplo tomado de una idea antigua, que estaba basada en el concepto de distancia y que, ahora, se puede redefinir con una mayor generalidad.

35.3.6 Espacios topológicos

35.3.6

Se define un espacio topológico como un conjunto S, conjuntamente con una colección $\mathscr{C}$ de subconjuntos de S, llamados conjuntos abiertos, que verifican los cuatro axiomas siguientes.

Definición 1
★ ★ ★
Definición 2
★ ★ ★

T1 El conjunto vacío $\varnothing \in \mathscr{C}$.

T2 $S \in \mathscr{C}$.

T3 La unión de cualquier número de elementos de $\mathscr{C}$ es también un elemento de $\mathscr{C}$.

T4 La intersección de cualquier número finito de elementos de $\mathscr{C}$ es también un elemento de $\mathscr{C}$.

La colección $\mathscr{C}$ de subconjuntos es una topología en (o de) S.

Definición 3
★ ★ ★

Es una definición muy sencilla. Obsérvese que nace de nuestra experiencia. A los subconjuntos de S los llamamos *conjuntos abiertos* porque tienen propiedades semejantes a las de los conjuntos abiertos que consideramos en las secciones anteriores.

Ejemplo 1

Ejemplo 1

El conjunto R, conjuntamente con la colección de subconjuntos definidos por todos los intervalos abiertos $]a, b[$ y todas sus uniones, es una topología. Con frecuencia recibe el nombre de topología *usual* de R. ■

Ejemplo 2

Ejemplo 2

Podemos, sin embargo, definir otras topologías en R. Por ejemplo, la menor colección posible de subconjuntos que verifica estos axiomas es $\{\varnothing, R\}$. En el otro extremo encontramos el conjunto de *todos* los subconjuntos de R, que es también una topología en R. Con esta topología, todo subconjunto de R es un *conjunto abierto*. Es obvio que estas dos topologías se pueden definir también en cualquier conjunto S. ■

Ejercicio 1

Ejercicio 1
(5 minutos)

Encontrar todas las topologías de un conjunto de tres elementos. ■

Un espacio topológico es más general que un espacio en el cual está definida la distancia. Cuando consideramos la continuidad, comenzamos por usar el concepto de distancia, pero terminamos por definir también la continuidad en términos de la preservación de los conjun-

Discusión
★ ★

tos abiertos en las trasformaciones inversas, de modo que nuestra definición fuera más general.

Ahora podemos adoptar esta definición de continuidad para una función que asocia dos espacios topológicos generales:

Si S y T son conjuntos que tienen definidas sus topologías respectivas y si, además, $f:S \rightarrow T$, entonces se dice que f es continua si la aplicación inversa de f es tal que la imagen de todo conjunto abierto de la topología de T es, a su vez, un conjunto abierto de la topología de S.

Definición 4
* * *

Nuestras ideas intuitivas acerca de la continuidad de las funciones reales están a salvo, según hemos visto, pero ahora tenemos una definición mucho más general y que es completamente independiente del concepto de distancia. Obsérvese también que la situación está ahora más bajo nuestro control: dados S, T y $f:S \rightarrow T$ podemos hacer que f sea continua o discontinua, de acuerdo con una escogencia apropiada de las topologías.

Finalmente consideremos un ejemplo más de nuestra habilidad para generalizar ideas bien conocidas.

Tema principal
* * *

Hay una idea que parece depender irremediablemente del concepto de "cercanía": la idea de límite. (Véase la *Unidad 7, Sucesiones y límites I.*)

Una sucesión de números reales

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

tiene un límite a si, dado un número real cualquiera $\epsilon > 0$, existe también un entero positivo M tal que

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > M$$

Es fácil generalizar esta definición para que comprenda también sucesiones de puntos de R^n, todo lo que tenemos que hacer es remplazar la función módulo por la métrica (la función distancia). Así, una sucesión de puntos

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

de R^n tiene un límite a si, dado un número real cualquiera $\epsilon > 0$, existe siempre un entero positivo M tal que

$$d(x_n, a) < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > M$$

Observe que ya hemos usado esta generalización en la *Unidad 28, Algebra lineal IV*, Sección 28.2.2. Allí definimos la convergencia de una sucesión de vectores en R^2 mediante el concepto de *norma*, que está relacionado con el concepto de *distancia*.

Veamos si podemos redefinir esta noción en términos que no comprendan la distancia.

Primero utilizamos la idea de vecindad. La sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de puntos de R^n tiene un límite a si, para cualquier vecindad $N(a, \epsilon, R^n)$, ocurre que todos los puntos que siguen a algún x_M de la sucesión pertenecen a la vecindad.

Ahora sustituimos "cualquier vecindad $N(a, \epsilon, R^n)$" por "cualquier conjunto abierto que contiene a a", y tenemos la definición buscada. Así, más generalmente:

Una sucesión $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de puntos de un espacio topológico S tiene un límite a si *todo* conjunto abierto de S que contiene a a con-

Definición 5
* * *

(*continúa en la página 34*)

Solución 1

Solución 1

Sea S el conjunto $\{a, b, c\}$.

Las posibles topologías son:

$\{\varnothing, S\}$
$\{\varnothing, \{x\}, S\}$, donde $x = a, b$ o c,
$\{\varnothing, \{x, y\}, S\}$, donde x, y son dos elementos distintos cualesquiera de $\{a, b, c\}$,
$\{\varnothing, \{x\}, \{x, y\}, \{y\}, S\}$, $\{\varnothing, \{x\}, \{x, y\}, S\}$, donde x, y son dos elementos distintos cualesquiera de $\{a, b, c\}$,
$\{\varnothing, \{x, y\}, \{y\}, \{y, z\}, S\}$, $\{\varnothing, \{x\}, \{y, z\}, S\}$, $\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{x, z\}, S\}$, donde x, y, z son elementos distintos cualesquiera de $\{a, b, c\}$, el conjunto de *todos* los subconjuntos de S. ■

(viene de la página 33)

tiene también todos los puntos de la sucesión que siguen a x_M, donde M es algún entero positivo.

Una vez más hemos conseguido generalizar un concepto de tal manera que podemos aplicarlo más ampliamente y no hemos perdido la situación particular de donde partimos. Llevada a las sucesiones reales que encontramos en la *Unidad 7*, nuestra definición actual coincide con la antigua, si interpretamos los conjuntos abiertos en términos de la topología usual de R.

35.4 Conclusión

35.4

Conclusión

* *

En esta unidad hemos generalizado los conceptos de vecindad, continuidad y límite. No hemos podido hacer mucho con las generalizaciones, principalmente porque no nos ha alcanzado el tiempo. Entonces, ¿por qué nos preocupamos tanto por las generalizaciones? Hay muchas respuestas. Sin algunas ideas acerca de la topología, que es hoy una de las más importantes ramas de la matemática, nuestro curso básico estaría incompleto. Esta unidad ha servido para dar una ligera idea de la materia.

Otra respuesta es que la topología es un buen ejemplo del pensamiento y de la investigación matemática: el proceso de generalización. En estos aspectos elementales, la generalización es familiar a todos. El álgebra elemental, considerada como una aritmética simbólica, es uno de nuestros primeros encuentros con la generalización. Aquí hemos descrito un ejemplo más sofisticado.

Hay otra respuesta más sutil pero probablemente más importante. Como hemos dicho, la topología se ha convertido en una parte vasta y creciente de la matemática. En los últimos treinta o cuarenta años se ha desarrollado como una materia bien disciplinada. No obstante, apenas ahora ha comenzado a encontrar aplicaciones fuera de la matemática. Antiguamente, la principal aplicación de la matemática estaba en las ciencias exactas. En general, cuando se construye un modelo matemático en las ciencias exactas, son muy importantes los conceptos tales como número y distancia porque el análisis matemá-

tico requerido es, generalmente, cuantitativo. Pero, más recientemente, se ha comenzado a aplicar la matemática a otros campos como la economía, la sicología, etc. Se ha empezado a crear modelos de situaciones de una naturaleza diferente. Podemos concebir una matemática que se ocupa de ideas tales como la de "vecindad conceptual", es decir, que construye un modelo en el cual los conjuntos abiertos están constituidos por conceptos relacionados, en el sentido en que Polya pregunta: "¿Conoce usted algún problema análogo a éste?"

Esto puede parecer muy sutil, y lo es. Es posible que nunca alcance una gran extensión pero creemos que está perfectamente de acuerdo con los fines de este Curso básico ofrecer algunas ideas acerca de una materia que está en pleno desarrollo. Con frecuencia se tiene la impresión de que la enseñanza de la matemática se reduce a trasmitir un cuerpo (muerto) de hechos conocidos, en vez de estudiar una materia viva y en crecimiento.

Reconocimiento

Se hace un grato reconocimiento a la siguiente fuente por las ilustraciones usadas en este texto por correspondencia:

The Mansell Collection por las ilustraciones de Leonhard Euler, Gottfried Wilhelm Leibniz, y Henri Poincaré.

M 100 — UNIDADES DEL CURSO BASICO DE MATEMATICAS

1 Funciones
2 Errores y exactitud
3 Operaciones y morfismos
4 Diferencias finitas
5 NO HAY TEXTO
6 Desiguales
7 Sucesiones y límites I
8 Computación I
9 Integración I
10 NO HAY TEXTO
11 Lógica I — Algebra de Boole
12 Diferenciación I
13 Integración II
14 Sucesiones y límites II
15 Diferenciación II
16 Probabilidad y estadística I
17 Lógica II — Prueba
18 Probabilidad y estadística II
19 Relaciones
20 Computación II
21 Probabilidad y estadística III
22 Algebra lineal I
23 Algebra lineal II
24 Ecuaciones diferenciales I
25 NO HAY TEXTO
26 Algebra lineal III
27 Números complejos I
28 Algebra lineal IV
29 Números complejos II
30 Grupos I
31 Ecuaciones diferenciales II
32 NO HAY TEXTO
33 Grupos II
34 Sistemas numéricos
35 Topología
36 Estructuras matemáticas